Geometria Algebraiczna, Seria 9

Zad. 1.

1. Niech $X = \operatorname{Spec} k[x,y]/(xy) \to Y = \operatorname{Spec} k$, gdzie k jest ciałem. Pokazać, że $\Omega_{X/Y}$ jest snopem quasi-koherentnym będącym nietrywialnym rozszerzeniem (tj. ciąg nie rozszczepia się) snopa będącego sumą prostą snopów o nośnikach w składowych nierozkładalnych X przez snop o nośniku w zerze.
2. Opisać snop $\Omega_{X/Y}$ gdy $X = \operatorname{Spec} k[t] \to Y = \operatorname{Spec} k[x,y]$ jest indukowane przez $k[x,y] \to k[t]$ zadane przez $x \to t^2$, $y \to t^{2025} + 1$.

Zad. 2.
Niech $C = V(f) \subset \mathbb{A}^2_k$, gdzie $f \in k[x,y]$ jest nierozkładalny i taki, że $f(0,0) = 0$.

- Obliczyć stożki styczne w 0 dla krzywych z Chapter I, Exercise 5.1, str. 35 z książki Hartshorne'a.
- Opisać wszystkie możliwe stożki styczne C w punkcie 0.

Zad. 3.
Niech X będzie schematem skończonego typu nad ciałem k i niech $x \in X(k)$. Pokazać, że jeśli x jest zawarty w dokładnie jednej składowej nierozkładalnej Y schematu X, to każda składowa nierozkładalna stożka stycznego $C_x X$ ma wymiar $\dim Y$.

Zad. 4.
Rozdmuchiwanie punktów osobliwych krzywej płaskiej (to jest ważne zadanie!!!):
R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Chapter I, Exercise 5.6

Zad. 5.
Niech R będzie pierścieniem przemiennym, $a_0, ..., a_n$ liczbami naturalnymi. Na $A = R[x_0, ..., x_n]$ wprowadzamy strukturę pierścienia z gradacją w ten sposób, że x_i ma stopień a_i. Określamy $X = \operatorname{Proj} A$. Niech $B = R[x_0, ..., x_n]$ ze zwykłą gradacją. Określamy homomorfizm $A \to B$ przez $x_i \to x_i^{a_i}$. Pokazać, że:

1. indukowany morfizm $\operatorname{Proj} B \to \operatorname{Proj} A$ jest skończony i surjektywny,
2. dla $n = 1$ $\operatorname{Proj} A$ jest izomorficzny z $\mathbb{P}^1_R$,
3. dla $n = 2$ i $(a_0, a_1, a_2) = (1, 1, 2)$ schemat $\operatorname{Proj} A$ jest izomorficzny z osobliwą kwadryką $y_2^2 = y_0 y_1$ w $\mathbb{P}^2_R$.