WAS, zadania na czwartą kartkówkę

We wszystkich zadaniach poniżej, $(W_t)_{t\geq 0}$ jest procesem Wienera.

1. Niech $X_t = \int_0^t e^{W_s}\mathrm{d}W_s$ oraz $Y_t = \int_0^t W_s \mathrm{d}X_s$, $t \geq 0$. Wykazać, że X oraz Y są martyngałami całkowalnymi z kwadratem.

2. Dla $t \geq 0$ zdefiniujmy $X_t = \int_0^t sW_s^2 \mathrm{d}W_s$. Wykazać, że X jest martyngałem całkowalnym z kwadratem i wyznaczyć nawias skośny procesów X oraz $\left(\int_0^t W_s \cos s \,\mathrm{d}X_s\right)_{t\geq 0}$.

3. Niech $X = (tW_t)_{t\geq 0}$. Udowodnić, że $\langle X, X\rangle = \left(2\int_0^t sW_s^2 \mathrm{d}s + \frac{1}{3}t^3\right)_{t\geq 0}$. Wykazać, że $\mathbb{E}\langle X, X\rangle_t = t^3$.

4. Wykazać, że ciąg

$$\sum_{k=n}^{2n-1}\left(W_{(k+1)/n}^2 - W_{k/n}^2 - \frac{1}{n}\right)\left(W_{(k+1)/n} - W_{k/n}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny według prawdopodobieństwa i wyznaczyć jego granicę.

5. Dane są liczby $1 < p < \infty$, $K > 0$ oraz ciągły lokalny martyngał M spełniający warunek $\mathbb{E}|M_\tau|^p \leq K$ dla dowolnego ograniczonego momentu zatrzymania τ. Udowodnić, że M jest martyngałem.

6. Rozstrzygnąć, dla jakich $\alpha > 0$ proces $X = (e^{\alpha W_s^2})_{s\geq 0}$ należy do $\mathcal{L}^2_\infty(W)$, a dla jakich $\alpha > 0$ należy do $\Lambda^2_\infty(W)$. Wskazać przykładowy ciąg lokalizujący $(\tau_n)_{n\geq 0}$ dla lokalnego martyngału $\int X \mathrm{d}W$.

7. Wykazać, że dla dowolnego ciągłego martyngału lokalnego M, dowolnego procesu $X \in \Lambda^2_T(M)$ oraz dowolnego momentu zatrzymania $\tau \leq T$ zachodzi nierówność

$$\mathbb{E}\sup_{t<\tau}\left(\int_0^t X_s \mathrm{d}M_s\right)^2 \leq 4\mathbb{E}\int_0^\tau X_s^2 \mathrm{d}\langle M\rangle_s.$$

8. Załóżmy, że M jest ciągłym martyngałem lokalnym startującym z zera. Dla ustalonego $a > 0$, niech $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : |M_t| > a\}$. Wykazać, że dla każdego $t \geq 0$ zachodzi nierówność

$$a^2\mathbb{P}(\tau_a \leq t) \leq \mathbb{E}\langle M\rangle_{\tau_a\wedge t}.$$

Wskazówka: warunek $\tau_a \leq t$ oznacza, że do chwili t proces M_t dotarł do zbioru $\{-a, a\}$, czyli $\{\tau_a \leq t\} = \{\sup_{s\leq t}|M_s| \geq a\} = \{\sup_{s\geq 0}|M_s^{\tau_a\wedge t}| \geq a\}$. Wykazać, że $M^{\tau_a\wedge t}$ jest martyngałem i wywnioskować tezę korzystając z podstawowych oszacowań teorii martyngałów.