WAS, zadania na pierwszą kartkówkę

We wszystkich zadaniach poniżej, $(W_t)_{t\geq 0}$ jest procesem Wienera.

1. Obliczyć $\mathbb{P}(W_1 > 0,\, W_2 > W_1,\, W_4 + W_2 \leq 2W_3)$.

2. Obliczyć $\mathbb{E}(W_3|W_4)$.

3. Niech h będzie ustaloną liczbą dodatnią. Udowodnić, że $(W_{t+h} - W_h)_{t\geq 0}$ jest procesem Wienera.

4. Niech $V = (V_t)_{t\geq 0}$ będzie procesem Wienera niezależnym od W oraz niech α będzie ustaloną liczbą rzeczywistą. Udowodnić, że proces $(\sin\alpha \cdot W_t + \cos\alpha \cdot V_t)_{t\geq 0}$ jest procesem Wienera.

5. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że proces Wienera jest niemalejący na pewnym przedziale otwartym. To znaczy,

$$\mathbb{P}(\exists_{a<b}\ t \mapsto W_t \text{ jest funkcją rosnącą na } (a,b)\,) = 0.$$

6. Procesy $X = (X_t)_{t\geq 0}$, $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ mają prawostronnie ciągłe trajektorie i te same rozkłady skończenie wymiarowe.

a) Wykazać, że jeśli X przyjmuje z prawdopodobieństwem 1 wyłącznie wartości całkowite, to Y także ma tę własność.

b) Wykazać, że jeśli $\limsup_{t\to 3^-} X_t \geq 5$ p.n., to $\limsup_{t\to 3^-} Y_t \geq 5$ p.n..

7. Proces $X = (X_t)_{t\in[0,1]}$ jest gaussowski i spełnia warunek $\mathbb{E}X_t = 0$ dla każdego $t \in [0,1]$. Ponadto, dla wszystkich $s,\, t \in [0,1]$,

$$|\mathrm{Cov}(X_s, X_t) - \mathrm{Cov}(X_t, X_t)| \leq 5|s-t|.$$

Wykazać, że X posiada modyfikację ciągłą.

8. Niech $\mathcal{X} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$. Czy zbiór

$$\{x \in \mathcal{X} : \lim_{t\downarrow 0} x(t) = 0 \text{ oraz } x(s) \geq 0 \text{ dla } s \in [9,10]\}$$

należy do σ-ciała generowanego przez zbiory cylindryczne? Jaka będzie odpowiedź, jeśli weźmiemy $\mathcal{X} = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ (funkcje ciągłe na $\mathbb{R}_+$)?