Zadania przygotowawcze z RP 2

1. Po wierzchołkach sześcianu ABCDA'B'C'D' przesuwa się pionek. W każdym ruchu pionek może z jednakowym prawdopodobieństwem przejść do jednego z sąsiadujących wierzchołków. Zakładamy, że pionek startuje z punktu A.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że pionek dojdzie do punktu D' szybciej niż do punktu B.

b) Obliczyć prawdopodobieństwo, że pionek dojdzie do punktu D' szybciej niż do punktów B i C.

c) Obliczyć wartość oczekiwaną liczby ruchów przed pierwszym powrotem do punktu A.

d) Obliczyć wartość oczekiwaną liczby ruchów przed drugim powrotem do punktu A.

e) Obliczyć wartość oczekiwaną liczby przejść przez punkt D' przed pierwszym powrotem do punktu A.

2. Dane są ciągi (U_n), (V_n), (X_n), (Y_n), (Z_n) zmiennych losowych. Rozkłady tych zmiennych zadane są następująco:

$$\mathbb{P}\left(U_n = \frac{-n^2+5n+1}{3n^2+1}\right) = \frac{3n+1}{6n}, \quad \mathbb{P}(U_n = \sin(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})) = \frac{3n-2}{6n}, \quad \mathbb{P}(U_n = n) = \frac{1}{6n},$$

$$g_{V_n}(x) = \frac{n}{1+2\sqrt{n}}\left(1_{[-\frac{1}{n},0]}(x) + 3\cdot 1_{[0,\frac{2}{\sqrt{n}}]}(x)\right),$$

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} n^{-n}(n-1)^{n-k}, \ k = 1,2,\ldots,n, \ P(X_n = -n) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n,$$

$$g_{Y_n}(x) = \frac{1}{2n}1_{[-n,n]}(x),$$

$$\mathbb{P}(Z_n = \frac{k}{n}) = \frac{4k^3}{n^2(n+1)^2}, \ k = 1,2,\ldots,n.$$

Zbadać zbieżność według rozkładu każdego z tych ciągów.

3. Dane są dwa ciągi (X_n), (Y_n) niezależnych zmiennych losowych, przy czym zmienne (X_n) mają ten sam rozkład wykładniczy z parametrem 1, a (Y_n) mają rozkład Poissona z parametrem n. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu

$$\frac{(X_1+X_2+\ldots+X_n)^2 - Y_n^2}{n\sqrt{n}}.$$

4. Dane są dwa martyngały (M_n), (N_n) adaptowane do tej samej filtracji $(\mathcal{F}_n)$. Niech

$$\tau = \inf\{n : M_n < N_n\}.$$

a) Czy τ jest momentem stopu?

b) Dowieść, że jeśli $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$, to $M_{\tau\vee n} + N_n$ jest $(\mathcal{F}_n)$-martyngałem.

5. Dany jest ciąg (ε_n) niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $\mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(\varepsilon_n = 0)$, gdzie $p \in (0,1)$ jest ustaloną liczbą rzeczywistą. Wyznaczyć taki ciąg liczbowy (a_n), aby ciąg zmiennych

$$Y_n = a_n + \varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n$$

był martyngałem względem filtracji $(\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n))_{n=1,2,\ldots}$. Czy ten martyngał jest zbieżny p.n.?