Zadania przygotowawcze z RP1

1. Zmienne losowe ε_1, ε_2, ε_3 są niezależne i mają rozkład $\mathbb{P}(\varepsilon_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Wyznaczyć $\mathbb{E}(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 | \varepsilon_1\varepsilon_2)$, $\mathbb{E}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 | \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, $\mathbb{E}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 | \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_3)$.

2. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku $[0, 100]$. Niech

$$\tau = \inf\{n \geq 1 : X_n \in [99, 100]\}.$$

a) Wyznaczyć rozkład τ.
b) Wyznaczyć rozkład X_τ.
c) Wykazać, że zmienne X_τ oraz τ są niezależne.

3. Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1, a Y ma rozkład Poissona z parametrem 1.
a) Wyznaczyć $\mathrm{Cov}(X, X+Y)$.
b) Wyznaczyć współczynnik korelacji między zmiennymi X a XY.
c) Wyznaczyć $\mathrm{Var}(X^2 + Y)$ oraz $\mathbb{E}\frac{Y}{2^X}$.
d) Czy zmienne $X + Y$, XY są niezależne?
e) Dla jakiego $C > 0$ istnieje $\mathbb{E}C^X$?

4. Zmienne losowe X, Y, Z są niezależne, przy czym X ma rozkład Bernoulliego $B(3, \frac{1}{2})$, a Y i Z mają rozkład $\frac{1}{2}\delta_{\{0\}} + \frac{1}{2}\delta_{\{1\}}$. Zbadać niezależność zmiennych a) $X+Y$, Z; b) $X+Y$, $Y+Z$; c) $X+Y$, $X+Z$; d) $X+Y$, YZ; e) $\max\{X, Y\}$, $\max\{Y, Z\}$.

5. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkład geometryczny z parametrem $\frac{1}{3}$. Wyznaczyć rozkład zmiennej $\max\{X, Y\}$. Czy jest ona niezależna od zmiennej $|X - Y|$?

6. Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład $N(0, 1)$, a Y ma rozkład $\mathbb{P}(Y = 0) = 1 - \mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{4}$. Wykazać, że zmienna XY nie ma rozkładu z gęstością. Wyznaczyć $\mathbb{E}|X|^Y$.

7. W urnie znajdują się 2 kule z numerem 1, 4 kule z numerem 2, ..., $2n$ kul z numerem n. Losujemy bez zwracania n kul. Niech X oznaczą liczbę takich numerów k, że wśród wyciągniętych kul znajdują się co najmniej 2 kule o numerze k. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$.

8. Rzucamy kostką, niech X oznacza liczbę wyrzuconych oczek. Następnie rzucamy X razy kostką. Niech Y oznacza liczbę wyrzuconych szóstek (w X rzutach; nie bierzemy pod uwagę pierwszego rzutu). Wyznaczyć $\mathbb{E}X$.

9. Klasa liczy 30 uczniów. Nauczyciel zadał do domu 5 zadań i następnego dnia wyczytuje z listy jednego ucznia i sprawdza jego zadania. Uczeń, którego numer na liście wynosi k, ma rozwiązane prawidłowo każde z pięciu zadań z prawdopodobieństwem $\frac{1}{k}$. Niech X oznacza liczbę prawidłowo rozwiązanych zadań przez wybranego ucznia. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$.