Zadania przygotowawcze

Konsultacje: piątek 10.VI.2005 około godz. 9.00

1. Rodzina Markowa (X_t) na $\mathbb{R}$ spełnia następujący warunek: dla pewnego $u > 0$ i każdego $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}_x(X_u = 0) = \frac{1}{2}.$$

Udowodnić, korzystając z własności Markowa, że dla każdego $t > u$ oraz każdego $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}_x(X_t = 0) = \frac{1}{2}.$$

2. Dane są dwa niezależne procesy Poissona (M_t), (N_t) adaptowane do filtracji $(\mathcal{F}_t)$. Niech

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : M_t N_t \geq 2\}.$$

Udowodnić, że τ jest momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_t)$ oraz wyznaczyć $\mathbb{E}\tau$.

3. Dany jest proces gaussowski (X_t), $t \geq 1$, o funkcji kowariancji $K(s,t) = \sqrt{t \wedge s} - \sqrt{ts}$ oraz funkcji wartości oczekiwanej $m(t) = 0$. Czy proces ten posiada modyfikację ciągłą? Czy ma on niezależne przyrosty?

4. Niech $(N_t), (M_t)$ będą dwoma niezależnymi procesami Poissona z parametrem 4. Udowodnić, że dla każdego t proces $(M_t \cdot N_t)$ jest różniczkowalny w punkcie t z prawdopodobieństwem 1.

5. Niech (W_t) będzie procesem Wienera. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje monotoniczne $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, by proces

$$X_t = W_t - f(t)W_1$$

był procesem Wienera na $[0,1]$.

6. Niech X_t będzie procesem gaussowskim o funkcji kowariancji $K(t,s) = t^2 s^2 \exp(t \wedge s)$ oraz funkcji wartości oczekiwanej $m(t) = 3 + \sin t$. Podać przykład takich funkcji $a, b : [0,\infty] \to (0,\infty)$, by proces

$$Y_t = a(t)X_t + b(t)$$

był martyngałem względem $(\mathcal{F}_t^X)$.

7. Niech (X_t) będzie rodziną Markowa na $\mathbb{R}$ spełniającą następujący warunek: istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i każdego $t > 0$,

$$\mathbb{P}_x(X_t \geq x) \leq \delta.$$

Udowodnić, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}_x(\text{proces } (X_t) \text{ jest rosnący na } [0,1]) = 0.$$

8. Niech (W_t) będzie procesem Wienera. Zdefiniujmy

$$\tau = \inf\{t : W_t = 2\}, \quad \sigma = \inf\{t : W_t = 4\}.$$

Obliczyć $\mathbb{P}(\sigma > 2\tau)$.

9. Niech (N_t) będzie procesem Poissona z parametrem 1. Niech

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : N_t^2 - 2 = 2tN_t - (t-1)^2\}.$$

Udowodnić, że $\mathbb{E}\tau = \infty$.

10. Niech (W_t) będzie procesem Wienera. Udowodnić, że proces

$$X_t = \exp(W_t)$$

jest procesem Markowa względem $(\mathcal{F}_t^W)$. Wyznaczyć gęstość przejścia oraz obliczyć

$$\mathbb{P}(X_1 > 1,\ X_2 \geq X_1).$$

Czy (X_t) ma mocną własność Markowa względem pewnej filtracji?

11. Niech (W_t) będzie procesem Poissona z parametrem 1. Niech

$$\tau = \inf\{t : W_t = 2t + 1\}.$$

Obliczyć $\mathbb{E}\tau$.

12. Niech (X_t) będzie procesem stochastycznym. Czy

$$\tau = \sup\{t : X_t \text{ jest rosnący na przedziale } [0,t]\},$$

$$\sigma = \inf\{t \geq 1 : X_t \text{ jest rosnący na przedziale } [t-1,t]\}$$

są momentami zatrzymania względem $(\mathcal{F}_t^X)$?

13. Niech (W_t) będzie procesem Wienera oraz τ będzie momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_t^W)$ o skończonej wartości oczekiwanej. Udowodnić, że $\mathbb{E}W_\tau = 0$ oraz $\mathbb{E}W_\tau^2 = \mathbb{E}\tau$.