Szkice rozwiązań zadań z Procesów Stochastycznych I

1. Niech (W_t) będzie procesem Wienera. Obliczyć

$$\mathbb{P}(W_1 > 0,\ W_2 > 0,\ W_3 > 0),\ \mathbb{P}(W_1 + W_2 < W_3).$$

Szkic rozwiązania: Pierwsze prawdopodobieństwo daje się wyznaczyć jako całkę potrójną; np.

$$\mathbb{P}(W_1 > 0, W_2 > 0, W_3 > 0) =$$

$$= P(W_1 > 0, W_2 - W_1 > -W_1, W_3 - W_2 > -(W_2 - W_1) - W_1),$$

a ponieważ $W_1,\ W_2 - W_1,\ W_3 - W_2$ są niezależne i mają rozkład $N(0,1)$, więc powyższe prawdopodobieństwo wynosi

$$\int_0^\infty \int_{-x}^\infty \int_{-x-y}^\infty \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2))dzdydx.$$

Drugie prawdopodobieństwo liczymy następująco:

$$P(W_1 + W_2 < W_3) = P(W_1 < W_3 - W_2) = \frac{1}{2},$$

gdyż zmienne W_1, $W_3 - W_2$ są niezależne i mają ten sam rozkład ciągły.

2. Niech (N_t) będzie procesem Poissona z parametrem λ. Obliczyć

$$\mathbb{P}(N_1 \geq 1,\ N_2 \geq 2,\ N_3 \geq 3),\ \mathbb{P}(N_1 + N_2 \geq N_3).$$

Szkic rozwiązania: Pierwsze prawdopodobieństwo rozbijamy:

$$\mathbb{P}(N_1 \geq 1, N_2 \geq 2, N_3 \geq 3) = \mathbb{P}(N_1 \geq 3) + \mathbb{P}(N_1 = 2, N_3 \geq 3) +$$

$$+\mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 \geq 3) + \mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 = 2, N_3 \geq 3) =$$

$$= \mathbb{P}(N_1 \geq 3) + \mathbb{P}(N_1 = 2, N_3 - N_2 \geq 1) + \mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 - N_1 \geq 2) +$$

$$+\mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 - N_1 = 1, N_3 - N_2 \geq 1),$$

a to już się łatwo liczy, wystarczy wykorzystać niezależność przyrostów procesu Poissona.

Drugie prawdopodobieństwo

$$\mathbb{P}(N_1 + N_2 \geq N_3) = \mathbb{P}(N_1 \geq N_3 - N_2)$$

nie będzie równe $\frac{1}{2}$, gdyż z dodatnim prawdopodobieństwem zmienne N_1 oraz $N_3 - N_2$ są równe. Mamy

$$\mathbb{P}(N_1 + N_2 \geq N_3) = \mathbb{P}(N_1 = N_3 - N_2) + \mathbb{P}(N_1 > N_3 - N_2) =$$

$$\mathbb{P}(N_1 = N_3 - N_2) + \frac{1}{2}\big[\mathbb{P}(N_1 > N_3 - N_2) + \mathbb{P}(N_1 < N_3 - N_2)\big].$$

Wykorzystaliśmy symetrię. Dalej, ponieważ

$$\mathbb{P}(N_1 > N_3 - N_2) + \mathbb{P}(N_1 < N_3 - N_2) + \mathbb{P}(N_1 = N_3 - N_2) = 1,$$

więc ostatecznie

$$\mathbb{P}(N_1+N_2\geq N_3)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathbb{P}(N_1=N_3-N_2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-2\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{k!k!}.$$

3. Niech (W_t) będzie procesem Wienera, a (N_t) - niezależnym od niego procesem Poissona z parametrem λ. Wyznaczyć rozkład zmiennej W_{N_t}.

Szkic rozwiązania: Liczymy dystrybuantę:

$$\mathbb{P}(W_{N_t}\leq x)=\mathbb{E}(\mathbb{P}(W_{N_t}\leq x|N_t))=$$

$$=\mathbb{E}\Big[\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}N_t}\exp(-\frac{y^2}{2N_t^2})dy\cdot 1_{\{N_t>0\}}+1_{\{N_t=0\}}1_{\{x\geq 0\}}\Big]=$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}k}\exp(-\frac{y^2}{2k^2})\cdot\exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}dy+\exp(-\lambda)1_{\{x\geq 0\}}.$$

4. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, że g jest funkcją monotoniczną oraz proces

$$X_t=f(t)W_{g(t)}$$

jest procesem Wienera.

Szkic rozwiązania: Proces (X_t) jest gaussowski, o funkcji wartości oczekiwanej 0; wystarczy więc, aby jego funkcja kowariancji była równa $s\wedge t$:

$$f(t)f(s)g(t)\wedge g(s)=t\wedge s.$$

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $s\leq t$. Rozważymy dwa przypadki:

(i) funkcja g jest niemalejąca. Wówczas $g(s)\leq g(t)$ i dostajemy równanie funkcyjne

$$f(t)f(s)g(s)=s.$$

Prawa strona nie zależy od t, wobec tego lewa również, a więc f musi być funkcją stałą: $f\equiv c$. Stąd $c^2\cdot g(s)=s$, czyli $g(s)=s/c^2$.

(ii) funkcja g jest nierosnąca. Wówczas $g(s)\geq g(t)$ i dostajemy

$$f(t)f(s)g(t)=s.$$

Stąd $f(t)g(t)=c$ dla pewnej stałej c i $cf(s)=s$, czyli $f(s)=s/c$ oraz $g(t)=c^2/s$.

5. Niech (W_t), (V_t) będą dwoma niezależnymi procesami Wienera. Udowodnić, że

$$\frac{W_t+V_t}{\sqrt{2}},\quad\frac{W_t-V_t}{\sqrt{2}}$$

są dwoma niezależnymi procesami Wienera. Wywnioskować stąd, że z prawdopodobieństwem 1 wykresy trajektorii dwóch niezależnych procesów Wienera przecinają się nieskończenie wiele razy. Wyznaczyć $\mathbb{E}(W_t|2W_t+3V_t)$.

Szkic rozwiązania: Oba procesy są gaussowskie o zerowej funkcji wartości średniej. Bez trudu można sprawdzić, że ich funkcje kowariancji wynoszą $s \wedge t$; np. dla pierwszego procesu,

$$K(s,t) = \mathbb{E}\frac{W_t + V_t}{\sqrt{2}} \cdot \frac{W_s + V_s}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbb{E}W_tW_s + \mathbb{E}W_tV_s + \mathbb{E}W_sV_t + \mathbb{E}V_tV_s) = \frac{1}{2}(s \wedge t + 0 + 0 + s \wedge t) = s \wedge t.$$

Zatem są to procesy Wienera. Niezależność: Niech $t_1, t_2, \ldots, t_n, s_1, s_2, \ldots, s_m > 0$, $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Wystarczy wykazać, że
$(*)$
$$\mathbb{P}(\frac{W_{t_1} + V_{t_1}}{\sqrt{2}} \in A_1, \ldots, \frac{W_{t_n} + V_{t_n}}{\sqrt{2}} \in A_n, \frac{W_{s_1} - V_{s_1}}{\sqrt{2}} \in B_1, \ldots, \frac{W_{s_m} - V_{s_m}}{\sqrt{2}} \in B_m) =$$

$$\mathbb{P}(\frac{W_{t_1} + V_{t_1}}{\sqrt{2}} \in A_1, \ldots, \frac{W_{t_n} + V_{t_n}}{\sqrt{2}} \in A_n)\mathbb{P}(\frac{W_{s_1} - V_{s_1}}{\sqrt{2}} \in B_1, \ldots, \frac{W_{s_m} - V_{s_m}}{\sqrt{2}} \in B_m).$$

Weźmy pod uwagę wektor

$$X = \left(\frac{W_{t_1} + V_{t_1}}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{W_{t_n} + V_{t_n}}{\sqrt{2}}, \frac{W_{s_1} - V_{s_1}}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{W_{s_m} - V_{s_m}}{\sqrt{2}}\right).$$

Jest to wektor gaussowski, ponadto dla $1 \leq k \leq n$, $n+1 \leq l \leq n+m$, zmienne X_k oraz X_l (odp. k-ta, l-ta współrzędna X) są nieskorelowane (łatwy rachunek). Zatem $\Sigma = (\sigma_{ij})$ =Cov(X) jest klatkowa: dla $1 \leq k \leq n$, $n+1 \leq l \leq n+m$, $\sigma_{kl} = \sigma_{lk} = 0$. Zatem Σ^{-1} też jest klatkowa. Gęstość X zadana jest wzorem

$$g(\bar{x}) = C\exp(-\frac{1}{2}(\Sigma^{-1}\bar{x}, \bar{x})),$$

gdzie $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$. Z postaci Σ^{-1} wynika, iż $(\Sigma^{-1}\bar{x}, \bar{x})$ jest formą kwadratową, w której nie występują wyrazy mieszane (tzn. postaci $a_{ij}x_iy_j$). Stąd

$$g(\bar{x}) = g_1(x_1, \ldots x_n)g_2(y_1, \ldots, y_m),$$

skąd już wynika $(*)$ (tw. Fubiniego).

Przechodzimy do drugiej części zadania. Proces $(W_t - V_t)/\sqrt{2}$ jest procesem Wienera - a proces Wienera z prawdopodobieństwem 1 ma nieskończenie wiele miejsc zerowych. Zatem

$$1 = \mathbb{P}(\frac{W_t - V_t}{\sqrt{2}} = 0 \text{ dla nieskończenie wielu } t) =$$

$$= \mathbb{P}(W_t = V_t \text{ dla nieskończenie wielu } t).$$

Pozostało obliczyć $\mathbb{E}(W_t|2W_t + 3V_t)$. Idea jest następująca: W_t rozbijemy na część mierzalną oraz na część niezależną względem $\sigma(2W_t + 3V_t)$. Najpierw wyznaczmy kombinację liniową W_t, V_t, niezależną od $2W_t + 3V_t$. Nietrudno zauważyć (wystarczy tylko zadbać o nieskorelowaność), że np. można wziąć $3W_t - 2V_t$. Mamy

$$W_1 = \frac{2(2W_t + 3V_t)}{13} + \frac{3(3W_t - 2V_t)}{13}.$$

Jest to szukane rozbicie; stąd

$$\mathbb{E}(W_t|2W_t+3V_t) = \mathbb{E}\left(\frac{2(2W_t+3V_t)}{13} + \frac{3(3W_t-2V_t)}{13}\Big|2W_t+3V_t\right) =$$

$$= \frac{2(2W_t+3V_t)}{13}.$$

6. Niech (W_t) będzie procesem Wienera. Ustalmy $t \in \mathbb{R}_+$. Dla jakich α z prawdopodobieństwem 1 istnieje skończona granica

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|W_{t+h}-W_t|}{h^\alpha} \ ?$$

Szkic rozwiązania: Ponieważ $(W_{t+h}-W_t)_{h\geq 0}$ jest procesem Wienera, więc

$$1 = \mathbb{P}(\lim_{h\to 0^+} \frac{|W_{t+h}-W_t|}{h^\alpha} \text{ istnieje i jest skończona}) =$$

$$\mathbb{P}(\lim_{h\to 0^+} \frac{|W_h|}{h^\alpha} \text{ istnieje i jest skończona}) =$$

$$\mathbb{P}(\lim_{h\to 0^+} \frac{|W_h|}{\sqrt{2h\log\log 1/h}} \cdot \frac{\sqrt{2h\log\log 1/h}}{h^\alpha} \text{ istnieje i jest skończona}).$$

Na mocy prawa iterowanego logarytmu, pierwszy czynnik ma granicę górną 1 p.n.. Jeśli więc $\alpha \geq \frac{1}{2}$, to granica istnieć nie będzie, gdyż drugi czynnik dąży do ∞. Jeśli zaś $\alpha < \frac{1}{2}$, to drugi czynnik dąży do 0 i granica istnieje. Odpowiedź więc brzmi: $\alpha < \frac{1}{2}$.

7. Niech (W_t) będzie procesem Wienera, a, b, $T \in (0,\infty)$, $\alpha > \frac{1}{2}$. Udowodnić, że

$$\mathbb{P}(\forall_{t\in[0,T]} W_t \in (-a,b)) > 0,$$
$$\mathbb{P}(\forall_{t\in[0,\infty)} W_t < a + t^\alpha) > 0.$$

Szkic rozwiązania: Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ $lim_{t\to 0^+} W_t = 0$ p.n., więc istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$(*) \qquad \mathbb{P}(\forall_{t\leq\delta}|W_t| < \varepsilon) > 0.$$

Zatem, z symetrii procesu Wienera, oba zdarzenia

$$A_1^+ = \{\forall_{t\leq\delta}|W_t| < \varepsilon, W_\delta > 0\}, A_1^- = \{\forall_{t\leq\delta}|W_t| < \varepsilon, W_\delta < 0\},$$

mają dodatnie prawdopodobieństwo. Udowodnimy indukcyjnie, że zdarzenia

$$A_k^+ = \{\forall_{t\leq k\delta}|W_t| < 2\varepsilon, \varepsilon > W_{k\delta} > 0\}, A_k^- = \{\forall_{t\leq k\delta}|W_t| < 2\varepsilon, -\varepsilon < W_{k\delta} < 0\},$$

mają dodatnie prawdopodobieństwo; z dowolności k, otrzymamy tezę. Otóż

$$\{\forall_{t\leq k\delta}|W_t| < 2\varepsilon, \varepsilon > W_{k\delta} > 0,\ \forall_{k\delta\leq t\leq(k+1)\delta}|W_t - W_{k\delta}| < \varepsilon, W_t - W_{k\delta} < 0\} \subset$$

$$\subset A_{k+1}^+ \cup A_{k+1}^-.$$

Czyli

$$\mathbb{P}(A_{k+1}^+ \cup A_{k+1}^-) \geq$$

$$\mathbb{P}(\forall_{t\leq k\delta}|W_t| < 2\varepsilon, \varepsilon > W_{k\delta} > 0)\mathbb{P}(\forall_{k\delta\leq t\leq (k+1)\delta}|W_t - W_{k\delta}| < \varepsilon, W_t - W_{k\delta} < 0).$$

Jest to liczba nieujemna, gdyż pierwsze prawdopodobieństwo to $\mathbb{P}(A_k^+)$, a drugie, po przesunięciu procesu Wienera ($(W_{s+k\delta} - W_{k\delta})_s$ jest procesem Wienera), jest równe (*). Zatem $A_{k+1}^+ \cup A_{k+1}^-$ ma dodatnie prawdopodobieństwo, czyli, z symetrii procesu Wienera, oba zdarzenia A_{k+1}^+, A_{k+1}^- mają dodatnie prawdopodobieństwo.

Przejdźmy do drugiej części zadania. Niech β będzie liczbą z przedziału $(\frac{1}{2}, \alpha)$. Na mocy prawa iterowanego logarytmu istnieje takie N, że

$$\mathbb{P}(\forall_{t>N} W_t < t^\beta) > 0.$$

Stąd istnieje stała K taka, że

$$(**) \qquad \mathbb{P}(\forall_t W_t < K + t^\beta) > 0.$$

Dobierzmy takie M, by dla $t > M$ zachodziła nierówność

$$t^\alpha > K + (t - M)^\beta.$$

Wobec tego

$$\{\forall_{t\leq M}|W_t| < a, \forall_{t\geq M} W_t - W_M < K + t^\beta\} \subset \{\forall_{t\in[0,\infty)} W_t < a + t^\alpha\},$$

oraz

$$\mathbb{P}(\forall_{t\in[0,\infty)} W_t < a + t^\alpha) \geq \mathbb{P}(\forall_{t\leq M}|W_t| < a, \forall_{t\geq M} W_t - W_M < K + t^\beta) =$$

$$= \mathbb{P}(\forall_{t\leq M}|W_t| < a)\mathbb{P}(\forall_{t\geq M} W_t - W_M < K + t^\beta)$$

gdyż przyrosty procesu Wienera są niezależne. Wystarczy już tylko zauważyć, że oba ostatnie prawdopodobieństwa są dodatnie (pierwsze na mocy poprzedniej części zadania, drugie - ponieważ $(W_{s+M} - W_M)_{s\geq 0})$ jest procesem Wienera oraz (**)).

8. Niech (N_t) będzie rozkładem Poissona z parametrem λ. Niech $\mu > \lambda$. Udowodnić, że

$$\mathbb{P}(\forall_{t\in[0,\infty)} N_t \leq \mu t) > 0,$$

ale

$$\mathbb{P}(\forall_{t\in[0,\infty)} N_t \leq \lambda t) = 0.$$

Szkic rozwiązania: W pierwszej części zadania należy postępować tak samo, jak w drugiej częsci zadania 7; mamy $N_t/t \to \lambda < \mu$, więc istnieje takie N, że

$$\mathbb{P}(\forall_{t>N} N_t < \mu t) > 0.$$

Zatem istnieje takie K, że

$$(*) \qquad \mathbb{P}(\forall_t N_t < K + \mu t) > 0.$$

Teraz weźmy takie M, że $Mt > K$. Mamy

$$\mathbb{P}(\forall_{t\in[0,\infty)} N_t \leq \mu t) \geq \mathbb{P}(\forall_{t\leq M} N_t = 0,\ \forall_{t\geq M} N_t < K + \mu(t - M)) =$$

$$\mathbb{P}(\forall_{t\leq M}N_t = 0,\ \forall_{t\geq M}N_t - N_M < K + \mu(t-M)) > 0$$

wykorzystując niezależność przyrostów procesu Poissona, (*) oraz fakt, iż $(N_{s+M} - N_M)_s$ jest procesem Poissona z parametrem λ.

Przejdźmy do drugiej części. Udowodnimy więcej, a mianowicie

$$\mathbb{P}(\forall_{n\in\mathbb{N}}N_n \leq \lambda n) = 0.$$

Niech $X_n = N_n - N_{n-1} - \lambda$, $n \geq 1$. Zmienne X_i są niezależne i mają ten sam rozkład o średniej 0. Mamy dowieść, że

$$\mathbb{P}(\forall_n S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leq 0) = 0.$$

Ciąg (S_n) jest martyngałem względem filtracji $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Niech $a,\ b > 0$ i niech

$$\tau_a = \inf\{n : S_n > a\},$$

$$\tau_{a,-b} = \inf\{n : S_n > a \text{ lub } S_n < -b\}.$$

Wystarczy udowodnić, że $\mathbb{P}(\tau_a < \infty) = 1$.

Mamy $\tau_{a,b} < \infty$ p.n. (gdyż $\mathbb{P}(X_n > a + b) > 0$ i wystarczy skorzystać z lematu Borela-Cantelli). Zatem, na mocy twierdzenia Dooba

$$(*) \qquad \mathbb{E}S_{\tau_{a,-b}\wedge n} = 0.$$

Mamy $S_{\tau_{a,-b}\wedge n} \to S_{\tau_{a,-b}}$ i $|S_{\tau_{a,-b}\wedge n}| \leq |S_{\tau_{a,-b}}|$, zatem wolno przejść w (*) z $n \to \infty$. Dostajemy

$$\mathbb{E}S\tau_{a,-b} = 0,$$

czyli

$$0 = \mathbb{E}S_{\tau_{a,-b}}1_{S_{\tau_{a,-b}}>a} + \mathbb{E}S_{\tau_{a,-b}}1_{S_{\tau_{a,-b}}<-b}$$

Ale $S_{\tau_{a,-b}} > -b - \lambda$, stąd

$$\mathbb{E}S_{\tau_{a,-b}}1_{S_{\tau_{a,-b}}>a} \geq (b+\lambda)\mathbb{P}(S_{\tau_{a,-b}} < -b).$$

Ponadto, $S_{\tau_{a,-b}} \leq a + X_{\tau_{a,-b}}$, stąd

$$\mathbb{E}S_{\tau_{a,-b}}1_{S_{\tau_{a,-b}}>a} \leq C,$$

gdzie C jest pewną stałą niezależną od $a,\ b$. Otrzymaliśmy więc

$$C \geq (b+\lambda)\mathbb{P}(S_{\tau_{a,-b}} < -b).$$

Zbiegając z $b \to \infty$ widzimy, że

$$\mathbb{P}(S_{\tau_{a,-b}} < -b) \to 0,$$

czyli

$$\mathbb{P}(\tau_a < \infty) = \lim_{b\to\infty}\mathbb{P}(\tau_a = \tau_{a,-b}) = 1.$$

9. Niech (W_t) będzie procesem Wienera. Udowodnić, że

$$\mathbb{P}(\forall_T \exists_{t>T} 2W_t = W_{2t}) = 1.$$

Szkic rozwiązania: Na mocy prawa iterowanego logarytmu, z prawdopodobieństwem 1 dadzą się znaleźć dowolnie duże t, s takie, że

$$2W_t > (2-\varepsilon)\sqrt{2t\log\log t}, \quad 2W_s < -(2-\varepsilon)\sqrt{2s\log\log s},$$

a z drugiej strony, ponownie na mocy prawa iterowanego logarytmu, dla tych s, t (o ile są one dostatecznie duże!), mamy

$$W_{2t} < (1+\varepsilon)\sqrt{2t\log\log(2t)}, \quad W_{2s} > -(1+\varepsilon)\sqrt{2s\log\log(2s)}.$$

Stąd, dla tych s, t, mamy

$$W_{2t} - 2W_t < 0, \quad W_{2s} - 2W_s > 0.$$

Z własności Darboux, istnieje u leżące między s i t takie, że $W_{2u} = 2W_u$. Ponieważ s, t były dowolnie duże, więc i u może być dowolnie duże.

10. (Zasada odbicia) Niech (W_t) będzie procesem Wienera. Udowodnić (elementarnie), że dla dowolnego $a > 0$, $t > 0$,

$$\mathbb{P}(\sup_{0\le s\le t} W_s > a) = 2\mathbb{P}(W_t > a) = \mathbb{P}(|W_t| > a).$$

Szkic rozwiązania: „Dyskretyzujemy”: odcinek $[0,t]$ dzielimy punktami $t_k = \frac{tk}{n}$, $k = 0,1,2,\ldots,n$. Przyjmijmy

$$X_k = X_k^{(n)} = W_{t_k} - W_{t_{k-1}}, \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

Niech

$$\tau = \inf\{k : X_1 + X_2 + \ldots + X_k > a\}.$$

Mamy

$$\mathbb{P}(\max_{1\le k\le n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_k) > a) = \mathbb{P}(\tau < \infty) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\mathbb{P}(\tau = k,\ X_{k+1} + \ldots + X_n > 0) + \mathbb{P}(\tau = k,\ X_{k+1} + \ldots + X_n < 0)\right].$$

Ale zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne, jako przyrosty procesu Wienera. Zdarzenie $\{\tau = k\}$ zapisuje się za pomocą zmiennych $X_1, X_2, \ldots, X_k$, a zatem

$$\mathbb{P}(\tau = k,\ X_{k+1} + \ldots + X_n > 0) = \mathbb{P}(\tau = k)\mathbb{P}(X_{k+1} + \ldots + X_n > 0),$$

co, na mocy symetrii zmiennych X_i, wynosi

$$\mathbb{P}(\tau = k)\mathbb{P}(X_{k+1} + \ldots + X_n < 0) = \mathbb{P}(\tau = k,\ X_{k+1} + \ldots + X_n < 0).$$

Zatem

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\mathbb{P}(\tau = k,\ X_{k+1} + \ldots + X_n > 0) + \mathbb{P}(\tau = k,\ X_{k+1} + \ldots + X_n < 0)\right] =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\tau = k,\ X_{k+1} + \ldots + X_n > 0) =$$

$$= 2\mathbb{P}(\tau < \infty, X_1 + X_2 + \ldots + X_n > X_1 + X_2 + \ldots + X_\tau).$$

Zbiegając z $n \to \infty$, widzimy, iż na mocy ciągłości trajektorii procesu Wienera,

$$\mathbb{P}(\max_{1 \le k \le n} (X_1 + X_2 + \ldots + X_k) > a) \to \mathbb{P}(\sup_{0 \le s \le t} W_s > a),$$

$$\mathbb{P}(\tau < \infty, X_1+X_2+\ldots+X_n > X_1+X_2+\ldots+X_\tau) \to \mathbb{P}(\tau_a < t,\ W_t > W_{\tau_a} = a),$$

gdzie $\tau_a = \inf\{t : W_t = a\}$. Wystarczy już tylko zauważyć, że

$$\{\tau_a < t\} \subset \{W_t > a\},$$

skąd

$$\{\tau_a < t,\ W_t > a\} = \{W_t > a\}.$$

11. Niech (W_t) będzie procesem Wienera. Ustalmy $a > 0$. Niech

$$\tau_a = \inf\{t : W_t = a\}.$$

Wyznaczyć rozkład zmiennej τ_a.

Szkic rozwiązania: Mamy, dla $t \ge 0$,

$$\mathbb{P}(\tau_a < t) = \mathbb{P}(\sup_{0 \le s \le t} W_s > a) = 2\mathbb{P}(W_t > a) = 2\mathbb{P}(W_1 > \frac{a}{\sqrt{t}}) = 2 - 2\Phi(\frac{a}{\sqrt{t}}).$$

Stąd, różniczkując, dostajemy gęstość τ_a:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{a^2}{2t}) \cdot \frac{a}{t^{3/2}} \cdot 1_{\{t>0\}}.$$

12. Niech $W_t^{(1)}$, $W_t^{(2)}$ będą dwoma niezależnymi procesami Wienera. Niech τ_a, $a \in \mathbb{R}$, oznacza pierwszy moment, w którym proces $(W_t^{(1)}, W_t^{(2)})$ trafia w prostą $y = a$. Wyznaczyć rozkład $W_{\tau_a}^{(1)}$, czyli pierwszej współrzędnej punktu trafienia.

Szkic rozwiązania: Liczymy dystrybuantę

$$\mathbb{P}(W_{\tau_a}^{(1)} \le u) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(W_{\tau_a}^{(1)} \le u | \tau_a)).$$

Proces $(W_t^{(1)})$ oraz zmienna τ są niezależne, gdyż τ jest definiowana za pomocą procesu $(W_t^{(2)})$. Stąd warunkowe prawdopodobieństwo wynosi

$$\int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_a}} \exp(-\frac{y^2}{2\tau_a}) dy,$$

stąd dystrybuanta jest równa (znamy gęstość τ_a z poprzedniego zadania)

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp(-\frac{y^2}{2x}) dy \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{a^2}{2x}) \cdot \frac{a}{x^{3/2}} dx.$$

Zamieniamy kolejność całkowania, łączymy eksponenty w jedną eksponentę i podstawiamy $z = \frac{y^2+a^2}{2x}$. Po starannym przeliczeniu wychodzi dystrybuanta scentrowanego rozkładu Cauchy'ego z parametrem a. Taki jest więc rozkład

$W^{(1)}_{\tau_a}$.

13. Udowodnić, że prawdopodobieństwo tego, że trajektoria procesu Wienera ma co najmniej jedno zero w przedziale (s,t), wynosi

$$\frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{s}{t}}.$$

Szkic rozwiązania: Idea: załóżmy, że $W_s = a$ i np. $a > 0$. Wówczas, jeśli (W_t) ma mieć co najmniej jedno zero w przedziale (s,t), to oczywiście musi być $W_u = 0$ dla $u \in (s,t)$, czyli $W_{v+s} = 0$ dla $v \in (0, t-s)$, czyli $W_{v+s} - W_s = -a$ dla $v \in (0, t-s)$, czyli, wreszcie,

$$\sup_{v\in(0,t-s)} (-(W_{v+s} - W_s)) \geq a.$$

Proces $V_v = -(W_{v+s} - W_s)$ jest procesem Wienera, niezależnym od W_s; zatem, na mocy zadania 10, mamy, iż szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$\mathbb{E}(\mathbb{P}(\text{co najmniej jedno zero w } (s,t)|W_s)) =$$

$$2\int_0^\infty \mathbb{P}(\tau_a < t-s)\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\exp(-\frac{a^2}{2s})da.$$

Pisząc $\mathbb{P}(\tau_a < t-s)$ jako całkę, zamieniając kolejność całkowania, dochodzimy do całki

$$\frac{1}{\pi\sqrt{s}}\int_0^{t-s}\frac{1}{y^{3/2}(1/y+1/s)}dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{t/s-1}\frac{dz}{\sqrt{z}(z-1)} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\sqrt{t/s-1}}\frac{2dy}{y^2+1} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{t/s-1} = \frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{s/t}.$$

14. Niech (W_t) będzie procesem Wienera. Obliczyć

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\inf_{0\leq s\leq t} W_s}{\sqrt{2t\log\log t}}, \quad \limsup_{t\to\infty}\frac{\sup_{0\leq s\leq t} W_s}{\sqrt{2t\log\log t}}.$$

Szkic rozwiązania: Granice te wynoszą odpowiednio -1, 1, na mocy prawa iterowanego logarytmu; dla pewnych u (co do których można żądać, aby były dowolnie duże), $\inf_{0\leq s\leq u} W_s = W_u \sim -\sqrt{2u\log\log u}$, czyli $\liminf \leq -1$; z drugiej strony, dla dużych u istnieje $t(u) \leq u$ takie, że

$$\inf_{0\leq s\leq u} W_s = W_{t(u)} \geq\sim -\sqrt{2t(u)\log\log t(u)} \geq -\sqrt{2u\log\log u},$$

czyli $\liminf \geq -1$. Tak samo postępujemy z $\limsup$.