Zadania na trzecią kartkówkę, RP II 2024/2025

1. Losujemy 1000 liczb z odcinka $[0, 9]$, przy czym każdą z nich zaokrąglamy do najbliższej liczby całkowitej. Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo tego, że wśród otrzymanych liczb co najmniej 550 to liczby nieparzyste?

2. Po liczbach całkowitych porusza się pionek. W każdym ruchu rzucamy kostką; jeśli wypadnie dwójka, to przesuwamy pionek o 1 w lewo, a jeśli piątka - o 1 w prawo. Jeśli wypadnie inna liczba oczek, pionek nie zmienia położenia. Wyznaczyć przedział (możliwie krótki), w którym z prawdopodobieństwem $\geq 0,95$ będzie znajdował się pionek po 1200 ruchach.

3. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, Y_1, Y_2, \ldots$ są niezależne, przy czym dla każdego $n \geq 1$, zmienna X_n ma rozkład wykładniczy z parametrem 2, Y_{2n-1} ma rozkład jednostajny na odcinku $[-1, 1]$, a Y_{2n} ma rozkład normalny o średniej 0 i wariancji 1. Czy ciąg

$$\frac{X_1Y_1 + X_2Y_2 + \ldots + X_nY_n}{\sqrt{n}}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, wyznaczyć rozkład graniczny.

4. Zmienne $X_1, X_2, \ldots, N_1, N_2, \ldots$ są niezależne, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma standardowy rozkład normalny, a N_n ma rozkład Poissona z parametrem n. Udowodnić, że ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{N_n}}{\sqrt{n}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

jest zbieżny według rozkładu i wyznaczyć rozkład graniczny.

5. Rozważamy ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1/2 = \mathbb{P}(X_n = 1)$, $n = 1, 2, \ldots$. Czy zmienne $\tau = \inf\{n : X_1 + X_2 + \ldots + X_n = 10\}$, $\sigma = \inf\{n : X_1 + X_2 + \ldots + X_{n+1} = 10\}$ są momentami zatrzymania względem filtracji naturalnej dla ciągu $(X_n)_{n\geq 1}$?

6. Załóżmy, że $(X_n)_{n\geq 1}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie zadanym przez $\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = 2) = 1/3$, $n = 1, 2, \ldots$. Dalej, połóżmy

$$\tau = \inf\{n \geq 1 \, : \, X_n \geq 1\}.$$

Dla jakich wartości parametru $a \in \{0, 1, 2\}$ zdarzenie $\{X_1 \geq a \text{ lub } X_2 \geq a\}$ należy do $\mathcal{F}_\tau$?

7. Niech $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ będzie martyngałem spełniającym warunek $\mathbb{E}M_n^2 < \infty$ dla każdego n, a ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n=0}^\infty$ będzie adaptowany do $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ i taki, że dla każdego n zachodzi $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$. Połóżmy $I_0 = 0$ oraz

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} X_{k-1}(M_k - M_{k-1}),$$

dla $n \geq 1$. Pokazać, że $(I_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^\infty$ jest martyngałem.

8. Dany jest ciąg $(\xi_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna ξ_n ma rozkład Poissona z parametrem n. Jaki warunek musi spełniać ciąg $(a_n)_{n\geq 1}$, aby ciąg $M_n = a_n\xi_1\xi_2 \ldots \xi_n$, $n = 1, 2, \ldots$, był a) martyngałem b) nadmartyngałem względem naturalnej filtracji?

9. Dany jest ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n=0}^\infty$ o wartościach całkowitych, taki, że $X_0 = -1$, $|X_n - X_{n-1}| \leq 1$, $\limsup_{n\to\infty} |X_n| = \infty$ p.n. oraz $(X_n^2 - \frac{1}{6}n)_{n=0}^\infty$ jest martyngałem względem pewnej filtracji. Niech $\tau = \inf\{n : |X_n| = 8\}$. Obliczyć $\mathbb{E}\tau$.

10. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$, są niezależne i mają ten sam rozkład

$$\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = p, \qquad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 2p,$$

dla pewnego ustalonego $p \in (0, 1/2)$. Niech $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ dla $n \geq 1$. Dla ustalonych $a, b \in \{1, 2, \ldots\}$, niech $\tau_{a,b} = \inf\{n : S_n \in \{-a, b\}\}$. Dowieść, że $\tau_{a,b}$ jest skończony prawie na pewno i wyznaczyć rozkład zmiennej $S_{\tau_{a,b}}$.