Zadania na drugą kartówkę, RP II 2024/2025

1. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ zmiennych losowych oraz niezależna od niego zmienna Z o standardowym jednowymiarowym rozkładzie normalnym. Udowodnić, że ciąg $(X_n + Z)_{n\geq 1}$ jest zbieżny według rozkładu wtedy i tylko wtedy, gdy $(X_n)_{n\geq 1}$ jest zbieżny według rozkładu.

2. Rozstrzygnąć, czy suma dwóch niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie może mieć rozkład jednostajny na przedziale $[-1, 1]$.

3. Rozstrzygnąć, czy funkcja

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\cos t + 1}{2} & \text{dla } |t| \leq \pi, \\ 0 & \text{dla } |t| > \pi \end{cases}$$

jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu na prostej.

4. Załóżmy, że φ jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu na prostej. Rozstrzygnąć, czy $(\operatorname{Re}\varphi)^2 - (\operatorname{Im}\varphi)^2$ jest funkcją charakterystyczną rozkładu na prostej.

5. Funkcja $\varphi : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ spełnia następujący warunek: $\varphi(t) < -\frac{1}{2024}$ dla $|t| > 10$. Dowieść, że φ nie jest funkcją charakterystyczną żadnego rozkładu na prostej.

6. Dany jest ciąg $(X_n)_{\geq 1}$ zmiennych losowych spełniający warunek

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = e^{2it-t^2} \qquad \text{dla wszystkich } t \in \mathbb{R}.$$

Obliczyć $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n < 2)$.

7. Zmienne X_1, X_2, ... są niezależne i mają rozkład jednostajny na przedziale $[-1, 1]$. Niech $\tau = \inf\{n : X_n \geq 0\}$. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną zmiennej X_τ.

8. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład zadany przez

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{2}{3} = 1 - \mathbb{P}(X_n = -2n).$$

Rozstrzygnąć, czy ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n^{3/2}}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny według rozkładu. W przypadku odpowiedzi pozytywnej, wyznaczyć rozkład graniczny.

9. Zmienne X_1, X_2, ... są niezależne, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład jednostajny na $[0, 4n]$. Czy ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n(n+1)}{n^{3/2}}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

jest zbieżny według rozkładu? W przypadku odpowiedzi pozytywnej, wyznaczyć rozkład graniczny.

10. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ zmiennych losowych (niekoniecznie niezależnych) takich, że dla każdego $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład $\Gamma(1, n)$, tzn. z gęstością

$$g_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} 1_{[0,\infty)}(x).$$

Dowieść, że ciąg

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{n}}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny według rozkładu. Wyznaczyć rozkład graniczny.

11. Załóżmy, że φ_1, φ_2, ... jest ciągiem funkcji charakterystycznych oraz a_1, a_2, ... jest ciągiem liczb nieujemnych o sumie 1. Wykazać, że $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$ jest funkcją charakterystyczną.