Zadania na pierwszą kartówkę, RP II 2024/2025

1. Dany jest ciąg $(a_n)_{n\geq 1}$ liczb dodatnich zbieżny do 0, oraz ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ zmiennych losowych takich, że dla $n \geq 1$, X_n ma rozkład geometryczny z parametrem p_n. Udowodnić, że jeśli $p_n/a_n \to \lambda > 0$, to $a_n X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{Exp}(\lambda)$.

2. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 2]$. Czy ciąg $(n \min_{k\leq n} X_k)_{n\geq 1}$ jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

3. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 2]$. Czy ciąg $(n \max_{k\leq n} X_k)_{n\geq 1}$ jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

4. Niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ zbiegają według rozkładu do zmiennej o rozkładzie wykładniczym z parametrem 2. Czy zmienne $Y_n = \min\{X_n, 5X_{n+1}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, są zbieżne według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

5. Ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ zbiega według rozkładu do zmiennej o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 2]$. Czy wynika stąd, że zmienne $\mathrm{sgn}(5X_n - 3)$, $n = 1, 2, \ldots$, zbiegają według rozkładu? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

6. Załóżmy, że X_n, X, Y_n, Y $(n = 1, 2, \ldots)$ są zmiennymi losowymi określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Udowodnić, że jeśli $(X_n)_{n\geq 1}$ zbiega według rozkładu do X i $(Y_n)_{n\geq 1}$ zbiega według rozkładu do Y stałej p.n., to $(X_n Y_n)_{n\geq 1}$ zbiega według rozkładu do XY.

7. Dane są dwa ciągi $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ zmiennych losowych, przy czym dla dowolnego $n \geq 1$ rozkład X_n jest zadany przez

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \frac{1}{n}, \qquad \mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n^2}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

a rozkład Y_n ma gęstość $g_n(x) = 1_{[0,n^{-1}]}(x) + 1_{[1,2-n^{-1}]}(x)$. Dowieść, że ciąg $(\sin X_n + 2Y_n)_{n\geq 1}$ jest zbieżny według rozkładu i wyznaczyć rozkład graniczny.

8. Wykazać, że ciąg rozkładów normalnych $(\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2))_{n\geq 1}$ zbiega według rozkładu do $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m_n \to m$ oraz $\sigma_n^2 \to \sigma^2$.

9. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ zmiennych dodatnich. Wykazać, że ciąg ten zbiega według rozkładu do zmiennej o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(-\ln X_n)_{n\geq 1}$ zbiega według rozkładu do zmiennej o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1.

10. Jaki warunek musi spełniać zbiór $\Lambda \subseteq (0, \infty)$, by rodzina rozkładów o gęstościach

$$g_\lambda(x) = \frac{\lambda}{\pi(x^2 + \lambda^2)}, \qquad x \in \mathbb{R},\ \lambda \in \Lambda,$$

była ciasna?