**Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - seria 9**

**1.** Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych, scentrowanych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na $[-1,1]$. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu

$$\frac{X_1}{\sqrt{1+nX_1^2}}+\frac{X_2}{\sqrt{1+nX_2^2}}+\ldots+\frac{X_n}{\sqrt{1+nX_n^2}},\qquad n=1,\,2,\,\ldots.$$

**2.** Załóżmy, że $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ jest filtracją, a $(X_n)_{n\geq 0}$ jest ciągiem zmiennych losowych adaptowanych do tej filtracji. Niech $B$ będzie podzbiorem borelowskim $\mathbb{R}$.
a) Udowodnić, że $\tau_1=\inf\{n: X_n\in B\}$ jest momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
b) Udowodnić, że dla dowolnego momentu zatrzymania $\tau$, zmienna losowa $\tau_2=\inf\{n>\tau_1 : X_n^2+n\sin X_n\in B\}$ też jest momentem zatrzymania względem $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

**3.** Dany jest ciąg $(X_n)_{n=1}^{10}$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathbb{P}(X_n=-1)=\mathbb{P}(X_n=1)=1/2$. Niech

$$\tau=\inf\{n>1: X_n>X_{n-1}\},\qquad \sigma=\sup\{n\geq 1: X_n>X_{n-1}\}$$

(przyjmujemy $\inf\emptyset=\sup\emptyset=\infty$). Czy $\tau$, $\sigma$ są momentami zatrzymania względem naturalnej filtracji dla ciągu $(X_n)_{n=1}^{10}$?

**4.** Zmienne $\tau$, $\sigma$, $(\tau_n)_{n\geq 1}$ są momentami zatrzymania adaptowanymi do $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Czy zmienne $\tau\wedge\sigma$, $\tau\vee\sigma$, $\tau+\sigma$, $\tau-\sigma$, $\inf_n\tau_n$ także są momentami zatrzymania względem $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$? Dowieść, że zdarzenia $\{\tau<\sigma\}$ oraz $\{\tau\leq\sigma\}$ należą do $\mathcal{F}_\tau$ oraz $\mathcal{F}_\sigma$. Dowieść, że $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}=\mathcal{F}_\tau\cap\mathcal{F}_\sigma$.

**5.** Załóżmy, że $(X_n)_{n\geq 1}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o średniej 1. Niech $Z_0=1$ oraz $Z_n=X_1X_2\ldots X_n$ dla $n\geq 1$. Udowodnić, że ciąg $(Z_n)_{n\geq 0}$ jest martyngałem oraz $(Z_n^2)_{n\geq 0}$ jest podmartyngałem względem pewnej filtracji.

**6.** Dany jest ciąg $(\xi_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $\mathbb{P}(\xi_n=-1)=\mathbb{P}(\xi_n=1)=1/2$. Niech $X_0=0$ i $X_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$ dla $n\geq 1$. Niech $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ będzie naturalną filtracją generowaną przez ciąg $(X_n)_{n\geq 0}$.
a) Udowodnić, że $(X_n)_{n\geq 0}$ oraz $(X_n^2-n)_{n\geq 0}$ są martyngałami względem $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
b) Wyznaczyć taką wartość parametru $a$, by ciąg $(a^n\cos X_n)_{n\geq 0}$ był martyngałem względem $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
c) Udowodnić, że dla $\lambda>0$, ciąg $(\exp(\lambda X_n-\lambda^2 n/2))_{n\geq 0}$ jest nadmartyngałem adaptowanym do $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.