**Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - seria 7**

**1.** Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, przy czym dla $n \geq 1$, $\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = 1/2$. Niech $s_n^2 = \sum_{k=1}^n \mathrm{Var} X_k$. Czy ciąg zmiennych losowych

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{s_n}$$

jest zbieżny wedlug rozkładu, a jeśli tak, to do jakiej granicy?

**2.** Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 1}$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu

$$\frac{X_1 + 2X_2 + \ldots + nX_n}{n^{3/2}} - \frac{\sqrt{n}}{2}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

**3.** Dany jest ciąg $(X_n)$ niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \ \mathbb{P}(X_n = -n) = \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{2n^2}.$$

Udowodnić, że

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1),$$

mimo iż nie jest spełniony warunek Lindeberga.

**4.** W urnie znajduje się jedna czarna kula. Wykonujemy następujący ciąg losowań: w każdym losowaniu ciągniemy kulę z urny, oglądamy ją, wrzucamy z powrotem oraz dorzucamy białą kulę. Dla $n \geq 1$, niech $X_n$ oznacza liczbę losowań, w których wyciągnęliśmy czarną kulę. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu

$$\frac{X_n - \ln n}{\sqrt{\ln n}}, \qquad n = 2, 3, \ldots.$$

**5.** Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

**6.** Załóżmy, że $X$ jest zmienną losową spełniającą warunki
(i) $\mathbb{E}X^2 < \infty$,
(ii) Jeśli $Y$, $Z$ są niezależne i mają ten sam rozkład co $X$, to $X \sim (Y + Z)/\sqrt{2}$.
Wykazać, że $X$ ma rozkład Gaussa o średniej 0.