Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - seria 6

1. Dowieść, że $B(n, \frac{1}{n}) \Rightarrow \mathrm{Pois}(1)$.

2. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, zadanym przez $\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 1) = 1/2$. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} X_n$ jest zbieżny p.n. i wyznaczyć rozkład sumy tego szeregu.

3. Załóżmy, że ε_1, ε_2, $\ldots$ jest niezależnym ciągiem zmiennych Rademachera. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu

$$\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n}{\sqrt{n}}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

4. Niech X_1, $X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[-1, 1]$. Zdefiniujmy

$$Y_n = \frac{\mathrm{sgn}(X_n)}{|X_n|^{1/\alpha}}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

gdzie $\alpha \in (0, 2)$ jest ustalonym parametrem. Udowodnić, że ciąg

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n}{n^{1/\alpha}}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny według rozkładu i wyznaczyć funkcję charakterystyczną rozkładu granicznego.

5. Załóżmy, że X, Y, U oraz V są niezależnymi zmiennymi losowymi o standardowym rozkładzie normalnym. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną zmiennej $XY + UV$.