Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - seria 5

1. Udowodnić, że dla $p > 2$ funkcja $\varphi(t) = e^{-|t|^p}$ nie jest funkcją charakterystyczną żadnego rozkładu.

2. Niech φ będzie funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu. Rozstrzygnąć, czy

a) φ^2, b) $\operatorname{Re}\varphi$, c) $|\varphi|^2$, d) $|\varphi|$

są funkcjami charakterystycznymi.

3. Dla $a \in \mathbb{R}$, niech

$$\varphi_a(t) = \begin{cases} 1 + a|x| & \text{jeśli } |x| \le 1, \\ 1 + a & \text{jeśli } |x| > 1. \end{cases}$$

Dla jakich wartości parametru a funkcja φ_a jest funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu prawdopodobieństwa?

4. Czy istnieją różne funkcje charakterystyczne φ_1, φ_2 pewnych rozkładów prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}$, pokrywające się na otwartym przedziale?

5. Wykazać, że $\varphi(t) = e^{-|t|}$ jest funkcją charakterystyczną rozkładu Cauchy'ego na $\mathbb{R}$, tzn. rozkładu o gęstości

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$

6. Zmienna losowa X przyjmuje wartości całkowite. Udowodnić, że dla $k \in \mathbb{Z}$ mamy

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\varphi_X(t)\mathrm{d}t.$$

7. Rzucamy monetą, dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła wynosi p, aż do momentu, gdy uzyskamy N orłów (łącznie, niekoniecznie z rzędu). Niech X_p oznacza liczbę losowań. Wykazać, że ciąg $(2n^{-1}X_{n^{-1}})_{n\ge 1}$ jest zbieżny według rozkładu.