

Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - seria 4

1. Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład jednostajny $U(0, 1)$, a Y ma rozkład zadany przez

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + Y$.

2. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Zmienna losowa N jest od nich niezależna i ma rozkład Poissona z parametrem λ . Wyznaczyć funkcję charakterystyczną zmiennej $X_1 + X_2 + \dots + X_N$.

3. Zmienne X, Y są niezależne, przy czym X oraz $X + Y$ mają rozkłady normalne. Udowodnić, że Y ma rozkład normalny lub jest stała p.n..

4. Zmienne losowe X_1, X_2, \dots, X_n są niezależne i mają ten sam rozkład, przy czym zmienna $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$. Wyznaczyć rozkład zmiennych X_i .

5. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny $U(-1, 1)$. Czy istnieje niezależna od niej zmienna Y taka, że rozkłady zmiennych $X + Y$ oraz $\frac{1}{2}Y$ są takie same?

6. Funkcja charakterystyczna zmiennej losowej X ma drugą pochodną w zerze. Udowodnić, że $\mathbb{E}X^2 < \infty$.