Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - seria 3

1. Jaki warunek musi spełniać
(i) rodzina $(\mathcal{U}(a,b))_{a,b}$ rozkładów jednostajnych,
(ii) rodzina $(\mathcal{N}(m,\sigma^2))_{m,\sigma^2}$ rozkładów normalnych,
by był spełniony warunek ciasności?

2. Dany jest ciąg $(X_n)_{n\geq 0}$ zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład jednostajny na przedziale $\mathcal{U}(a_n, b_n)$ dla pewnych $a_n < b_n$. Jaki warunek muszą spełniać ciągi $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, by rodzina rozkładów zmiennych $1/X_n$ była ciasna?

3. Dane są ciągi $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ zmiennych losowych, przy czym
· dla dowolnego n, zmienne X_n i Y_n są niezależne;
· X_n ma rozkład z gęstością $g_n(x) = \frac{1}{3}n1_{[-1/n,1/n]}(x) + 1_{[n,n+1/3]}(x)$;
· Y_n ma rozkład Poissona z parametrem $1/n$.
Rozstrzygnąć, czy ciąg $(X_n \operatorname{tg}(Y_n))_{n\geq 1}$ zbiega według rozkładu. W przypadku odpowiedzi twierdzącej, wyznaczyć rozkład graniczny.

4. Wyznaczyć funkcje charakterystyczne:
a) rozkładu dwupunktowego, geometrycznego, Bernoulliego, Poissona;
b) jednostajnego, wykładniczego, dwustronnego wykładniczego.

5. Zmienna losowa X ma standardowy rozkład normalny. Wyznaczyć $\mathbb{E}X^n$ dla $n \in \mathbb{Z}_+$, korzystając z własności funkcji charakterystycznych.

6. Rozstrzygnąć, czy podane niżej funkcje są funkcjami charakterystycznymi i jeśli tak, podać odpowiedni rozkład.

a) $\cos t$, b) $\cos^2 t$, c) $\frac{1}{4}(1+e^{it})^2$, d) $\frac{1+\cos t}{2}$, e) $(2-e^{it})^{-1}$.

7. Niech X będzie zmienną losową o funkcji charakterystycznej φ. Dowieść, że jeśli $|\varphi(t)| = 1$ dla pewnego $t \neq 0$, to istnieją $b, c \in \mathbb{R}$ takie, że zmienna X jest skoncentrowana na zbiorze $\{ck + b : k \in \mathbb{Z}\}$.