Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - seria 2

1. Dane są trzy ciągi $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$, $(Z_n)_{n\geq 1}$ zadane na tej samej przestrzeni probabilistycznej, przy czym $X_n \sim N(1/n, 1+1/n)$, $Y_n \sim B(10, n^{-1/n})$, a rozkład Z_n zadany jest przez warunki

$$\mathbb{P}(Z_n = -1) = 1 - \frac{1}{n+1}, \qquad \mathbb{P}(Z_n \in A) = \int_A x^n \mathrm{d}x$$

dla $A \in \mathcal{B}(0,1)$. Zbadać, czy ciąg $(X_n + Y_n + Z_n)_{n\geq 1}$ zbiega według rozkładu, w razie odpowiedzi pozytywnej wyznaczyć rozkład graniczny.

2. Dany jest ciąg (X_n) zmiennych losowych przyjmujących wartości w przedziale $[0,1]$. Udowodnić, że jeśli dla każdego $k = 0, 1, 2, \ldots$ mamy $\mathbb{E}X_n^k \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{k+1}$, to (X_n) jest zbieżny według rozkładu.

3. Załóżmy, że (X_n) jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Cauchy'ego, tzn. z gęstością

$$g(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Udowodnić, że $\frac{1}{n}\max_{k\leq n} X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{1}{T}$, gdzie T ma rozkład wykładniczy. Wyznaczyć parametr tego rozkładu.

4. Załóżmy, że ciąg (X_n) zbiega według rozkładu do X. Niech $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie taką funkcją borelowską, że $\mathbb{P}(X \in \{\text{punkty nieciągłości } h\}) = 0$.
(i) Udowodnić, że $h(X_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} h(X)$.
(ii) Udowodnić, że jeśli h jest dodatkowo ograniczona, to $\mathbb{E}h(X_n) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}h(X)$.

5. Załóżmy, że ciąg (X_n) zbiega według rozkładu do X. Udowodnić, że
(i) $\mathbb{E}|X| \leq \liminf_n \mathbb{E}|X_n|$.
(ii) jeśli $X_1, X_2, \ldots$ są dodatkowo jednostajnie całkowalne, to $\mathbb{E}X_n \to \mathbb{E}X$.

6. Dane są dwa ciągi (X_n) oraz (Y_n) zmiennych losowych, zbieżnych według rozkładu do X oraz Y, odpowiednio.
(i) Czy (X_n, Y_n) zbiega według rozkładu do (X, Y)?
(ii) Jaka jest odpowiedź w (i) jeśli dodatkowo przy każdym n zmienne X_n oraz Y_n są niezależne, oraz X i Y są niezależne?