Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - seria 11

1. Rozważamy błądzenie symetryczne $(S_n)_{n\geq 0}$ po liczbach całkowitych. Zbadać zbieżność p.n. oraz w L^p nadmartyngału $\big(\exp(S_n - n/2)\big)_{n=0}^{\infty}$.

2. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają ten sam rozkład skoncentrowany na liczbach nieujemnych, różny od $\delta_{\{1\}}$, o średniej 1. Dowieść, że ciąg $(X_1 X_2 \ldots X_n)_{n\geq 1}$ jest zbieżny p.n., ale nie jest zbieżny w L^1.

3. W pojemniku znajduje się pewna liczba cząstek, z których każda w chwili n z równym prawdopodobieństwem albo dzieli się na dwie, albo ginie. W chwili 0 liczba cząstek wynosi 1. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 po pewnym czasie wszystkie cząstki zginą, tzn. w pojemniku nie będzie ani jednej cząstki.

4. Gramy w orła i reszkę symetryczną monetą. Przed n-tą grą, opierając się ewentualnie na wynikach poprzednich gier, sami ustalamy stawkę w n-tej grze: wybieramy V_n, $1 \leq V_n \leq a$, i jeśli wypadnie orzeł, dostajemy V_n zł, jeśli reszka — płacimy V_n zł. Niech S_n oznacza łączną wygraną po n grach. Udowodnić, że $(S_n)_{n\geq 0}$ jest martyngałem (względem naturalnej filtracji).

5. Mamy 10 zł w monetach 1 zł, a potrzebujemy pilnie 20 zł. Jedynym sposobem zdobycia tych pieniędzy jest gra w 3 karty z szulerem (który wygrywa z prawdopodobieństwem 2/3). Szuler gotów jest grać z nami wiele razy o dowolne stawki, jakie jesteśmy w stanie założyć (przyjmijmy dla uproszczenia, że stawka nie przekracza 10 zł). Udowodnić, że niezależnie od wyboru strategii nasze szanse na uzyskanie brakujących 10 zł nie przekraczają 1/3.

6. Rozważamy błądzenie symetryczne $(S_n)_{n\geq 0}$ po liczbach całkowitych. Niech τ będzie całkowalnym momentem zatrzymania względem naturalnej filtracji ciągu $(S_n)_{n\geq 0}$. Dowieść, że $\mathbb{E}S_\tau = 0$ oraz $\mathbb{E}S_\tau^2 = \mathbb{E}\tau$.

7. Niech $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[0,1]$, a α, θ będą ustalonymi parametrami z przedziału $(0,1)$. Definiujemy ciąg $X := (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indukcyjnie wzorami $X_0 = \alpha$ oraz

$$X_{n+1} := \theta X_n + (1-\theta)1_{[0,X_n]}(U_{n+1}), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

a) Wykazać, że $0 < X_n < 1$ dla dowolnego n.

b) Wykazać, że $(X_n)_{n\geq 0}$ jest martyngałem względem naturalnej filtracji.

c) Udowodnić, że $(X_n)_{n\geq 0}$ zbiega prawie na pewno i w L^p dla dowolnego $1 \leq p < \infty$ do pewnej granicznej zmiennej losowej X_∞.

d) Wykazać, że dla dowolnego n,

$$\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2] = (1-\theta)^2 \mathbb{E}[X_n(1 - X_n)].$$

e) Obliczyć $\mathbb{E}[X_\infty(1 - X_\infty)]$ i wyznaczyć rozkład X_∞.