Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - seria 10

W zadaniach 1 - 3 poniżej rozpatrujemy ciąg $X_1, X_2, \ldots$ *niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie* $\mathbb{P}(X_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_n = -1)$, *i oznaczamy* $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ *dla* $n \geq 1$. *Dla* $a, b \in \mathbb{Z}$, $a, b > 0$, *niech* $\tau_a = \inf\{n : S_n = a\}$ *oraz* $\tau_{a,b} = \inf\{n : S_n \in \{-a, b\}\}$.

1. Załóżmy, że $p = 1/2$. Korzystając z teorii martyngałów obliczyć $\mathbb{P}(S_{\tau_{a,b}} = -a)$, $\mathbb{P}(S_{\tau_{a,b}} = b)$, $\mathbb{E}\tau_{a,b}$ oraz $\mathbb{E}\tau_a$.

2. Rozwiązać zadanie 1 przy założeniu $1/2 < p < 1$.

3. Niech $p = 1/2$ oraz $\sigma = \inf\left\{n : S_n = \frac{1}{2}n + 1\right\}$. Wykazać, że $\mathbb{P}(\sigma < \infty) \leq \sqrt{1/e}$.

4. Egzaminator przygotował m zestawów pytań. Studenci kolejno losują kartki z pytaniami, przy czym zestaw raz wyciągnięty nie wraca do ponownego losowania. Student nauczył się odpowiedzi na k zestawów ($k \leq m$). Obserwując przebieg egzaminu chce przystąpić do niego w takim momencie, żeby zmaksymalizować szanse zdania. Czy istnieje strategia optymalna?