Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - seria 1

1. Udowodnić, że ciąg $(\mathrm{Exp}(n/(n+1)))$ jest zbieżny według rozkładu do $\mathrm{Exp}(1)$.

2. Dany jest ciąg (X_n) zmiennych losowych zbieżny według rozkładu do zmiennej losowej X. Udowodnić, że ciąg $(\sin X_n)$ jest zbieżny według rozkładu do zmiennej $\sin X$.

3. Czy zmienne losowe posiadające gęstość mogą zbiegać według rozkładu do zmiennej o rozkładzie dyskretnym? Czy zmienne losowe o rozkładach dyskretnych mogą zbiegać do zmiennej o rozkładzie ciągłym?

4. Niech $X_1,\ X_2,\ \ldots$ będą zmiennymi losowymi, przy czym dla $n \geq 1$ rozkład zmiennej X_n określony jest następująco:

$$\mathbb{P}\left(X_n = \frac{j}{n}\right) = \frac{2j}{n(n+1)},\quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Dowieść, że ciąg (X_n) jest zbieżny według rozkładu. Wyznaczyć rozkład graniczny.

5. Niech $B(n,p)$ oznacza rozkład Bernoulliego o n próbach z prawdopodobieństwem sukcesu p, a $\mathrm{Pois}(\lambda)$ - rozkład Poissona z parametrem λ. Wykazać, że jeśli $np_n \to \lambda$, to $B(n,p_n) \Rightarrow \mathrm{Pois}(\lambda)$.

6. Załóżmy, że (X_n), X są zmiennymi losowymi zadanymi na pewnej ustalonej przestrzeni probabilistycznej.

(i) Dowieść, że jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, to $X_n \Rightarrow X$.

(ii) Dowieść, że jeśli $X_n \Rightarrow X$ oraz X jest stała p.n., to $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

7. Niech g_n, g oznaczają odpowiednio gęstości rozkładów prawdopodobieństwa μ_n, μ na $\mathbb{R}^N$. Udowodnić, że jeśli $g_n \to g$ p.w., to $\mu_n \Rightarrow \mu$.

8. Niech S będzie przeliczalnym podzbiorem $\mathbb{R}^N$, zaś μ_n, μ - miarami probabilistycznymi skupionymi na S. Wykazać, że jeśli dla każdego $x \in S$ mamy $\mu_n(\{x\}) \to \mu(\{x\})$, to $\mu_n \Rightarrow \mu$.

9. Dane są ciągi (X_n), (Y_n) zmiennych losowych, określonych na tej samej przestrzeni probabilistycznej, przy czym (X_n) zbiega według rozkładu do X, a (Y_n) zbiega według rozkładu do zmiennej Y stałej p.n.. Udowodnić, że (X_n+Y_n) zbiega według rozkładu do $X+Y$. Czy teza pozostaje prawdziwa bez założenia o jednopunktowym rozkładzie Y?