Zadania z Rachunku Prawdopodobieństwa II - seria 12

1. Załóżmy, że $(S_n)_{n\geq 0}$ jest błądzeniem symetrycznym po liczbach całkowitych, startującym z zera. Czy ciągi $(|S_n|)_{n\geq 0}$, $(S_n^+)_{n\geq 0}$ są łańcuchami Markowa?

2. Dany jest łańcuch Markowa na przestrzeni stanów $E = \{1, 2, 3, 4\}$, o macierzy przejścia danej wzorem

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Jakie jest prawdopodobieństwo dotarcia w dwóch krokach ze stanu 1 do stanu 4?

b) Zakładając, że $X_0 = 1$ p.n., obliczyć prawdopodobieństwo tego, że łańcuch odwiedzi 2 przed dotarciem do stanu 4.

c) Zakładając, że $X_0 = 3$ p.n., obliczyć średni czas oczekiwania na dojście do stanu 4.

d) Zakładając, że $X_0 = 3$ p.n., obliczyć średni czas oczekiwania na powrót do stanu 3.

e) Wyznaczyć rozkład stacjonarny. Czy łańcuch jest okresowy? Czy jest nieprzywiedlny?

3. Rzucamy kostką tak długo, aż pojawi się ciąg 16 lub 66. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ciąg 16 pojawi się wcześniej?

4. Rzucamy symetryczną monetą aż do momentu, gdy wyrzucimy serię 4 orłów z rzędu. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby przeprowadzonych rzutów oraz łączną liczbę reszek zaobserwowanych po drodze.

5. Dany jest lańcuch Markowa $(X_n)_{n\geq 0}$ o macierzy przejścia P, której każdy wiersz jest taki sam. Udowodnić, że zmienne X_0, X_1, ... są niezależne.

6. Dany jest lańcuch Markowa $(X_n)_{n\geq 0}$ startujący ze stanu i. Niech $\tau = \inf\{n \geq 1 : X_n \neq i\}$. Udowodnić, że τ ma rozkład geometryczny.