MNRP, kolokwium - szkice rozwiązań

1. a) Mamy dwadzieścia miejsc w ciągu. Wybieramy dwa miejsca dla zer, następnie dwa miejsca dla jedynek, dwa miejsca dla dwójek, itd. Stąd szukana liczba ciągów to

$$\binom{20}{2}\binom{18}{2}\binom{16}{2}\cdots\binom{2}{2} = \frac{20!}{2!2!2!\ldots 2!}.$$

Alternatywnie, należy rozbić zbiór 20 miejsc w ciągu na dziesięć zbiorów o mocy 2 każdy; prowadzi to bezpośrednio do powyższego ułamka.

b) Każdy niemalejący ciąg jest jednoznacznie wyznaczony przez informację, ile razy wystąpiło w nim zero, ile razy wystąpiła jedynka, ..., ile razy wystąpiła dziewiątka. Z drugiej strony wiemy, że łączna liczba wystąpień wszystkich cyfr wynosi 20. Wobec tego, szukana liczba ciągów to liczba rozwiązań równania

$$x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_9 = 20,$$

gdzie x_j to liczba wystąpień cyfry j. Stąd odpowiedź: $\binom{20+10-1}{10-1} = \binom{29}{9}$.

2. Policzmy prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego i zastosujmy wzór włączeń i wyłączeń. Niech

$$D = \{\text{pewne dwie osoby spośród } A,\ B,\ C \text{ siedzą obok siebie}\}.$$

Wówczas

$$D = D_{AB} \cup D_{BC} \cup D_{CA},$$

gdzie D_{XY} oznacza zdarzenie „X, Y siedzą obok siebie”. Bezpośrednio liczymy, iż

$$\mathbb{P}(D_{AB}) = \mathbb{P}(D_{BC}) = \mathbb{P}(D_{CA}) = \frac{2}{9}$$

(osobę A sadzamy dowolnie; osoba B ma dziewięć możliwości, z czego dwie są obok A). Podobnie,

$$\mathbb{P}(D_{AB} \cap D_{BC}) = \mathbb{P}(D_{BC} \cap D_{CA}) = \mathbb{P}(D_{CA} \cap D_{AB}) = \frac{2}{72}$$

oraz $\mathbb{P}(D_{AB} \cap D_{BC} \cap D_{CA}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$. Stąd, na mocy wzoru włączeń i wyłączeń,

$$\mathbb{P}(D) = 3 \cdot \frac{2}{9} - 3 \cdot \frac{2}{72} = \frac{7}{12}$$

i odpowiedź w zadaniu brzmi: 5/12.

3. Stosujemy wzór na prawdopodobieństwo całkowite. Niech H_I, H_{II} oznaczają zdarzenia „wyciągnięto talię I, II", odpowiednio. Niech $A = \{$wylosowano co najmniej jednego króla$\}$, $B = \{$ wylosowano co najmniej jednego kiera$\}$. Mamy

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}(A' \cup B') = 1 - \mathbb{P}(A') - \mathbb{P}(B') + \mathbb{P}(A' \cap B').$$

Każde z powyższych trzech prawdopodobieństw liczymy w ten sam sposób; policzymy $\mathbb{P}(A')$. Mamy

$$\mathbb{P}(A') = \mathbb{P}(A'|H_I)\mathbb{P}(H_I) + \mathbb{P}(A'|H_{II})\mathbb{P}(H_{II}).$$

Ale

$$\mathbb{P}(A'|H_I) = \mathbb{P}(A'|H_{II}) = \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}, \quad \mathbb{P}(H_I) = \mathbb{P}(H_{II}) = \frac{1}{2},$$

więc

$$\mathbb{P}(A') = \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}},$$

itp.

4. Wprowadźmy zdarzenia H_1 - wylosowano prawidłową monetę, H_2 - wylosowano monetę z dwoma orłami, H_3 - wylosowano trzecią monetę, A - uzyskano orła. Ze wzoru Bayesa,

$$\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A|H_3)\mathbb{P}(H_3)}.$$

Z warunków zadania, $\mathbb{P}(H_1) = \mathbb{P}(H_2) = \mathbb{P}(H_3) = 1/3$ oraz

$$\mathbb{P}(A|H_1) = 1/2, \qquad \mathbb{P}(A|H_2) = 1, \qquad \mathbb{P}(A|H_3) = 3/4.$$

Wystarczy wstawić.

5. Oznaczmy niewiększą z wylosowanych liczb przez x, a niemniejszą przez y. Wówczas $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$. Zadanie sprowadza się do rozważenia trzech przypadków:

I. Lewy kawałek ma długość mniejszą niż 1/3, a pozostałe - niemniejszą (prowadzi to do układu nierówności $x < 1/3$, $y - x \geq 1/3$ oraz $1 - y \geq 1/3$).

II. Środkowy kawałek ma długość mniejszą niż 1/3, a pozostałe - niemniejszą (prowadzi to do układu nierówności $x \geq 1/3$, $y - x < 1/3$ oraz $1 - y \geq 1/3$).

III. Prawy kawałek ma długość mniejszą niż 1/3, a pozostałe - niemniejszą (prowadzi to do układu nierówności $x \geq 1/3$, $y - x \geq 1/3$ oraz $1 - y < 1/3$).

Zaznaczając na rysunku odpowiednie figury i licząc ich pola, dostajemy wynik 1/3.

6. a) Stosujemy uogólniony schemat Bernoulliego, gdzie w pojedynczej próbie (losowaniu) mamy trzy wyniki: kulę białą, czarną lub zieloną (z prawdopodobieństwami 5/12, 4/12 i 3/12, odpowiednio). Odpowiedź:

$$\binom{10}{4,3,3}\left(\frac{5}{12}\right)^4\left(\frac{4}{12}\right)^3\left(\frac{3}{12}\right)^3.$$

b) Z definicji prawdopodobieństwa warunkowego, należy obliczyć iloraz stosownych prawdopodobieństw. W liczniku pojawia się prawdopodobieństwo, że wyciągniemy 5 kul białych i dwie kule zielone. Wobec tego, w trzech losowaniach wyciągnięto czarną kulę i w liczniku mamy

$$\binom{10}{5,2,3}\left(\frac{5}{12}\right)^5\left(\frac{4}{12}\right)^3\left(\frac{3}{12}\right)^2.$$

W mianowniku zaś stać będzie prawdopodobieństwo, że kula zielona pojawiła się dwa razy. Aby je wyznaczyć, potraktujmy losowanie z zadania jako nieco inny schemat Bernoulliego, tym razem klasyczny. Mianowicie, próbą jest pojedyncze losowanie, ale wyróżniamy tylko dwa wyniki: sukces - zielona kula, porażka - nie-zielona kula. Widzimy, że szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$\binom{10}{2}\left(\frac{3}{12}\right)^2\left(\frac{9}{12}\right)^8.$$

Wystarczy już tylko podzielić odpowiednie wyrażenia.

7. Zastosujemy alternatywny warunek na niezależność: dla dowolnego ciągu $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{100}$ znaków, sprawdzimy, że

$$\mathbb{P}(A_2^{\varepsilon_2} \cap A_3^{\varepsilon_3} \cap \ldots \cap A_{100}^{\varepsilon_{100}}) = \mathbb{P}(A_2^{\varepsilon_2})\mathbb{P}(A_3^{\varepsilon_3})\ldots\mathbb{P}(A_{100}^{\varepsilon_{100}})$$

(gdzie, jak zwykle, $A^1 = A$, $A^{-1} = A'$). Jak łatwo sprawdzić, $\mathbb{P}(A_j) = 1/6$ i $\mathbb{P}(A_j') = 5/6$. Wobec tego, po prawej stronie stoi liczba $5^k/6^{99}$, gdzie k to liczba -1 w ciągu $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{100}$. Po lewej stronie stoi ta sama liczba: istotnie, policzmy ją „krok po kroku". W pierwszym losowaniu nie jest istotne co wypadnie: kładziemy 6/6. Jeśli $\varepsilon_2 = 1$ (czyli w iloczynie występuje zdarzenie A_2), to w drugim losowaniu ma powtórzyć się liczba z pierwszego rzutu: stąd przemnażamy przez 1/6; jeśli $\varepsilon_2 = -1$, to powtórzenia ma nie być i przemnażamy lewą stronę przez 5/6. I tak dalej: przy uwzględnianiu kolejnych zdarzeń $A_k^{\varepsilon_k}$ przemnażamy lewą stronę przez 1/6 bądź 5/6, w zależności od znaku ε_k. Stąd zachodzi odpowiednia równość i zdarzenia są niezależne.

Uwaga: można to zadanie rozwiązać w oparciu o zwykła definicję niezależności.

8. Rozważmy następujące kodowanie (ustawienie zawodników w ciąg $(W_1, W_2, \ldots, W_{2^m})$). Najpierw spójrzmy na finał: zwycięzcę turnieju wpiszmy na pierwszym miejscu, przegranego z finału - na drugim miejscu. To załatwia finał: ustawiliśmy 2 zawodników W_1, W_2 w permutacji. Teraz półfinał: zawodnika, który przegrał tam z W_1, ustawmy na trzecim miejscu; zawodnika który przegrał z W_2, ustawmy na czwartym miejscu. To załatwia półfinał: ustawiliśmy zawodników W_1, W_2, W_3, W_4 w permutacji. Teraz ćwierćfinał: zawodnika, który przegrał z W_1, stawiamy na miejscu nr 5; zawodnika który przegrał z W_2, na miejscu nr 6; zawodnika, który przegrał z W_3, na miejscu nr 7; wreszcie, zawodnika który przegrał z W_4, na miejscu nr 8. To załatwia ćwierćfinał i ustawia zawodników W_1, W_2, $\ldots$, W_8. Rozumowanie kontynuujemy aż uwzględnimy wszystkie rundy. Widać, że dostajemy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy przebiegami turnieju a permutacjami zbioru zawodników. Stąd teza.