

**Egzamin z Metodyki Nauczania Rachunku Prawdopodobieństwa,
22 czerwca 2022 r.**

Czas trwania: 150 minut.

1. Dysponujemy trzema sześciennymi kostkami do gry. Dwie z kostek są prawidłowe, a trzecia jest fałszywa, z samymi szóstkami. Losujemy kostkę, a następnie rzucamy nią tak długo, aż otrzymamy szóstkę. Niech X oznacza liczbę wykonanych rzutów. Wyznaczyć rozkład i wariancję X .

2. W pewnej sieci energetycznej odnotowuje się średnio trzy gwałtowne spadki napięcia rocznie.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w najbliższym miesiącu wystąpią co najmniej dwa spadki napięcia.

b) Na podstawie liczby spadków napięcia, oblicza się współczynnik zużycia transformatorów: jeśli liczba spadków w skali roku wynosi n , to współczynnik ten wynosi $2 + \cos n$. Obliczyć wartość oczekiwaną współczynnika w 2023 r.

Wskazówka do b): warto skorzystać z zespolonej definicji funkcji cosinus.

3. Urna zawiera 4 kule ponumerowane liczbami od 1 do 4. Losujemy kolejno po jednej kuli ze zwracaniem aż do momentu, gdy wyciągniemy dwa razy z rzędu tę samą kulę.

a) Obliczyć wartość oczekiwaną liczby losowań.

b) Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby różnych numerów, które pojawią się po drodze.

4. Grupa 100 osób, wśród których są osoby A , B oraz C , ustawia się losowo w kolejce. Niech X oznacza liczbę osób stojących między A oraz B , a Y oznacza liczbę osób stojących między B i C . Wyznaczyć średnią X oraz kowariancję zmiennych X , Y .

5. Załóżmy, że n , m są liczbami całkowitymi dodatnimi. Wykazać tożsamość

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \binom{k-1}{m-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$