Metodyka nauczania Rachunku Prawdopodobieństwa
Kolokwium, 28 kwietnia 2016 r.

1. Rzucono 10 razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że uzyskany ciąg wyników jest niemalejący?

Odpowiedź: $\binom{15}{5} \cdot 6^{-10}$.

2. Hazardzista o kapitale 1 zł udaje się do kasyna, gdzie uczestniczy w serii gier. W każdej grze, niezależnie od pozostałych, może wygrać 1 zł z prawdopodobieństwem p albo przegrać 1 zł z prawdopodobieństwem $1-p$. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że hazardzista splajtuje po 1001 grze (tzn. jego kapitał po 1001 grze po raz pierwszy wyniesie 0).

Odpowiedź: $\frac{1}{501}\binom{1000}{500}p^{501}(1-p)^{501}$.

3. W pudełku znajduje się 15 piłek tenisowych, z których 9 nie zostało jeszcze użytych. Wylosowano dwie piłki, rozegrano nimi mecz i odłożono je z powrotem do pudełka. Następnie ponownie wylosowano dwie piłki z pudełka i rozegrano nimi mecz. Zakładając, że obie piłki w drugim meczu były nieużywane (zarówno w poprzednim meczu, jak i wcześniej), obliczyć prawdopodobieństwo tego, że obie piłki w pierwszym meczu też były użyte po raz pierwszy.

Odpowiedź: $\dfrac{\binom{7}{2}\binom{9}{2}}{\binom{7}{2}\binom{9}{2}+\binom{9}{1}\binom{6}{1}\binom{8}{2}+\binom{9}{2}\binom{6}{2}}$

4. Z talii 52 kart losujemy kolejno po jednej karcie bez zwracania. Załóżmy, że pierwszy as pojawił się w dwudziestym losowaniu. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dwudziestą pierwszą kartą będzie a) as pik; b) dwójka trefl?

Odpowiedź: a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{51}$, b) $\frac{1}{51}$.

5. Wykazać, że dla dowolnych zdarzeń A, B takich, że $\mathbb{P}(B) > 0$, zachodzi nierówność $\mathbb{P}(A|A \cup B) \geq \mathbb{P}(A|B)$.

6. W urnie znajduje się m kul białych oraz n kul czarnych. Losujemy kolejno bez zwracania po jednej kuli aż do momentu, gdy w urnie pozostaną kule tylko jednego koloru. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że będzie to biały kolor.

Odpowiedź: $\frac{m}{m+n}$.

7. Rzucono n razy monetą. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że w ciągu wyników nie pojawiły się dwie reszki pod rząd.

Wskazówka: Użyć rekurencji.

Odpowiedź: $F_{n+2}/2^n$, gdzie $(F_n)_{n\geq 1}$ to ciąg Fibonacciego.

8. Wykazać tożsamość

$$n! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^n$$

dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n.