Metodyka nauczania Rachunku Prawdopodobieństwa
Kolokwium, 7 maja 2014 r.

1. a) Ile jest dwudziestoelementowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, \ldots, 9\}$ takich, że każda cyfra pojawia się dokładnie dwa razy?

b) Ile jest dwudziestoelementowych, niemalejących ciągów o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, \ldots, 9\}$?

2. Dziesięć osób, wśród których są osoby A, B, C, siadają losowo wokół okrągłego stołu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że żadne dwie spośród osób A, B, C nie będą siedziały obok siebie?

3. Dysponujemy dwiema taliami kart: talia I jest standardowa, a w talii II zamieniono króla kier na króla pik (tak więc w talii II są dwa króle pik i nie ma króla kier). Losujemy talię, a następnie losujemy z niej pięć kart bez zwracania. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy co najmniej jednego króla i co najmniej jednego kiera.

4. W urnie znajdują się trzy monety: prawidłowa; z dwoma orłami; oraz trzecia, na której orzeł wypada z prawdopodobieństwem $3/4$, a reszka z prawdopodobieństwem $1/4$. Wylosowano monetę i wykonano nią rzut, otrzymując orła. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że rzucano prawidłową monetą?

5. Z odcinka $[0, 1]$ wylosowano dwa punkty, dzieląc go na trzy kawałki. Obliczyć prawdopodobieństwo, że dokładnie jeden z kawałków ma długość mniejszą niż $1/3$.

6. W urnie znajduje się pięć białych, cztery czarne oraz trzy zielone kule. Losujemy 10 razy po jednej kuli ze zwracaniem.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wyciągniemy cztery kule białe i po trzy kule czarne i zielone?

b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wyciągniemy pięć kul białych, jeśli wiadomo, że kula zielona pojawiła się w dokładnie dwóch losowaniach?

7. Rzucono 100 razy kostką do gry. Zbadać niezależność zdarzeń $A_j = \{$liczby oczek w j-tym oraz $j-1$-szym rzucie są takie same$\}$, $j = 2, 3, \ldots, 100$.

8. W turnieju tenisowym startuje $n = 2^m$ graczy. W pierwszej rundzie graczy dzieli się losowo na $n/2$ par, z których każda rozgrywa mecz. Przegrani odpadają, a zwycięzcy przechodzą do drugiej rundy, w której są dzieleni losowo na $n/4$ par; w obrębie każdej pary rozgrywany jest mecz, którego zwycięzca przechodzi do następnej rundy, itd.

Wykazać, że liczba wszystkich możliwych wyników turnieju (tzn. pełnej informacji o jego przebiegu) jest równa $n!$.

Przykład: jeśli $n = 4$ i w turnieju uczestniczyli zawodnicy A, B, C, D, to przykładowy przebieg turnieju to: /1 runda: A wygrał z C, D wygrał z B; 2 runda: D wygrał z A./