Egzamin z Metodyki Nauczania Rachunku Prawdopodobieństwa, 5 września 2017 r.

Czas trwania: 120 minut.

1. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, a A, B będą zdarzeniami takimi, że $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$.
a) Wykazać, że jeśli $\mathbb{P}(A|B) = 1$, to $\mathbb{P}(B'|A') = 1$.
b) Wykazać, że jeśli $\mathbb{P}(A|A \cup B) = 1/2$, to $2\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$.

2. Gracze A i B rzucają na przemian po dwa razy kostką aż do momentu, gdy A wyrzuci sumę 6 lub B wyrzuci sumę 9. Zakładając, że A rzuca pierwszy, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że ostatni rzut będzie wykonany przez B?

3. Urna zawiera N kul, wśród których jest b kul białych, c czarnych, a pozostałe $N-b-c$ są zielone. Losujemy ze zwracaniem n razy po jednej kuli i definiujemy X jako liczbę kul białych, a Y jako liczbę kul czarnych wśród wylosowanych kul. Wyznaczyć $\mathbb{E}XY$.

4. Po wierzchołkach czworokąta $ABCD$ porusza się pionek, w każdym ruchu przesuwając się do jednego z sąsiadujących wierzchołków (każdy z nich ma prawdopodobieństwo $1/2$). W chwili początkowej pionek znajduje się w punkcie A. Ile średnio razy pionek odwiedzi wierzchołek B zanim dojdzie po raz pierwszy do punktu C?

5. Wykazać, że dla dowolnej liczby całkowitej n zachodzi tożsamość

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{2n-k}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 2^{n-k}.$$