

**Egzamin z Metodyki Nauczania Rachunku Prawdopodobieństwa,
16 czerwca 2023 r.**

Czas trwania: 90 minut.

1. (15p.) Po wierzchołkach kwadratu $ABCD$ poruszają się dwa pionki, biały i czarny. W każdym ruchu każdy z pionków niezależnie od drugiego i od poprzedzających ruchów przemieszcza się do jednego z dwóch sąsiadujących wierzchołków (każdy z tych wierzchołków ma szansę $1/2$ bycia wybranym). W chwili początkowej biały pionek jest w wierzchołku A , a czarny w wierzchołku C . Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że pionki spotkają się po raz pierwszy w wierzchołku B .
2. (15p.) W urnie znajduje się m kul czarnych. Wykonujemy następującą procedurę: wyciągamy z urny czarną kulę i zastępujemy ją nową kulą, która jest biała z prawdopodobieństwem p i czarna z prawdopodobieństwem $1 - p$. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby losowań, po których w urnie będą wyłącznie białe kule.
3. (20p.) Każde z pól tablicy 10×10 malujemy losowo na jeden z dwóch kolorów: na białe lub na czarne. Każdy kolor ma tę samą szansę na wybranie, wybory dla różnych pól są niezależne. Następnie, na tablicy chcemy położyć prostokąt o wymiarach 9×1 , poziomo lub pionowo, tak, by pokrył dokładnie dziewięć pól tablicy; umieszczenie jest możliwe tylko wtedy, gdy odpowiadające dziewięć pól jest jednobarwnych. Niech X oznacza liczbę możliwości umieszczenia prostokąta. Obliczyć średnią i wariancję X .