Metodyka nauczania Rachunku Prawdopodobieństwa
- zadania na czwartą kartkówkę.

1. Pewna firma posiada dwa biura, w Warszawie i Nowym Jorku, funkcjonujące niezależnie osiem godzin na dobę. Średnia liczba telefonów przychodzących do biura obsługi klienta w Warszawie, w ciągu jednej godziny, wynosi 4; w Nowym Jorku liczba ta wynosi 7. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że w pewnym ustalonym dniu do obu biur przyjdzie łącznie dokładnie 100 telefonów.

2. Losujemy (w sposób niezależny) dwa niepuste, otwarte przedziały I, J o końcach w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$. Obliczyć wartość oczekiwaną długości ich części wspólnej.

Uwaga: Być może przydadzą się tożsamości

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}.$$

3. Pierwszy gracz rzuca trzema, a drugi dwiema jednakowymi monetami o nominale 1zł. Wygrywa i dostaje wszystkie pięć monet ten z graczy, który wyrzuci więcej orłów. W przypadku, gdy liczby wyrzuconych orłów są równe, gra jest kontynuowana. Obliczyć wartość oczekiwaną wygranej każdego z graczy.

4. Rzucamy prawidłową kostką aż do momentu uzyskania piątki oraz parzystej liczby oczek. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów.

5. Niech k będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Rzucamy prawidłową monetą aż do momentu gdy wypadnie (łącznie, niekoniecznie z rzędu) co najmniej k orłów i co najmniej k reszek. Niech X oznacza liczbę rzutów. Znaleźć rozkład zmiennej X.

6. W urnie znajduje się 50 białych kul. Losujemy ze zwracaniem po jednej kuli, przy czym wyciągniętą kulę malujemy na czerwono, jeśli jest biała. Niech X oznacza liczbę czerwonych kul w urnie po 20 losowaniach. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$ i $\operatorname{Var} X$.

7. Z urny zawierającej n kul ponumerowanych liczbami od 1 do n losujemy k razy po jednej kuli ze zwracaniem. Niech X, Y oznaczają odpowiednio najmniejszy oraz największy z wyciągniętych numerów. Wykazać, że $\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y = n + 1$.

8. W urnie znajduje się pięć kul białych, trzy czarne i dwie czerwone. Losujemy po jednej kuli ze zwracaniem aż do momentu wyciągnięcia kuli czerwonej. Obliczyć wartość oczekiwaną wyciągniętych białych kul.