**Metodyka nauczania Rachunku Prawdopodobieństwa
- zadania na trzecią kartkówkę.**

1. Z talii 52 kart losujemy 5 kart bez zwracania. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że otrzymaliśmy co najmniej cztery figury, jeśli wiadomo, że mamy asa i nie mamy żadnych kierów (przyjmujemy, że as jest figurą).

2. W urnie znajduje się jedna prawidłowa kostka oraz jedna fałszywa, z dwoma szóstkami i czterema trójkami. Losujemy kostkę, wykonujemy nią rzut, a następnie rzut powtarzamy, jeśli wypadła szóstka lub trójka.

Po wykonaniu powyższego doświadczenia okazało się, że w dokładnie jednym rzucie wypadła szóstka. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że kostka jest prawidłowa?

3. Z urny, zawierającej n kul ponumerowanych liczbami od 1 do n, losujemy kolejno ze zwracaniem po jednej kuli i zapisujemy na kartce numer kuli, jeśli nie pojawił się on we wcześniejszych losowaniach. Doświadczenie kontynuujemy aż do momentu, gdy zobaczymy wszystkie możliwe numery kul. Zbadać niezależność zdarzeń $A_j = \{j$-ty oraz $j+1$-szy numer na kartce pojawiły się w wyniku wykonania dwóch kolejnych rzutów$\}$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

4. W urnie I znajdują się trzy białe kule i dwie czarne; w urnie II znajdują się dwie białe kule i trzy czarne. Losujemy kulę z urny I i albo wrzucamy ją z powrotem, albo przekładamy do urny II (każda z tych dwóch możliwości ma prawdopodobieństwo 1/2). Następnie, analogiczną czynność wykonujemy dla urny II. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pierwsza z wylosowanych kul była biała, jeśli wiadomo, że po dwóch losowaniach urna II zawiera dokładnie dwie białe kule?

5. Do n-osobowego samolotu wsiada n podróżnych $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\ldots$, $\mathcal{P}_n$, zajmując kolejno miejsca, osoba po osobie. Pasażer $\mathcal{P}_1$ ignoruje informację na swoim bilecie i siada na losowo wybranym miejscu. Każda z następnych osób siada na miejscu zgodnie ze swoim biletem, jeśli jest wolne; w przeciwnym razie, wybiera losowo jedno z pozostałych miejsc. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że pasażer $\mathcal{P}_n$ usiądzie na miejscu opisanym na swoim bilecie.

6. W turnieju szachowym uczestniczy 2^n graczy, wśród których są zawodnicy X oraz Y. W pierwszej rundzie, gracze są parowani w sposób losowy; następnie, 2^{n-1} zwycięzców ponownie grupuje się w pary losowo, itd., aż do n-tej rundy, w której dwóch pozostałych zawodników rozgrywa partię o zwycięstwo w turnieju. Zakładamy, że nie ma remisów oraz że gracze grają na tym samym poziomie (w każdej partii, prawdopodobieństwo zwycięstwa dla każdego gracza wynosi 1/2). Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że zawodnicy X oraz Y rozegrają partię przeciwko sobie.

7. Trzech graczy X, Y, Z rzuca kostką do gry, w kolejności $XYZXYZ\ldots$. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że pierwszą szóstkę wyrzuci X, drugą szóstkę wyrzuci Y oraz trzecią szóstkę wyrzuci Z.

8. W urnie znajduje się 1 biała i 1 czarna kula. Wykonujemy ciąg n losowań zgodnie z następującym schematem: losujemy kulę, oglądamy ją, a następnie zwracamy ją do urny i dokładamy jeszcze jedną kulę tego samego koloru. Dla $j \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, niech p_j oznacza prawdopodobieństwo tego, że po n losowaniach urna zawiera dokładnie j kul białych. Udowodnić, że $p_j = 1/(n+1)$ dla wszystkich j.