

RP WNE 2011/2012, VI seria

Uwaga: ze względu na inną liczbę zajęć środowych i piątkowych, zadania z tej serii przeznaczone są dla osób mających ćwiczenia w środy

1. Zmienna losowa X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$. Wyznaczyć rozkłady zmiennych a) e^X , b) X^2 . Czy te rozkłady są ciągłe? W przypadku odpowiedzi twierdzącej, podać gęstość.

2. Wyznaczyć kwantyl rzędu $\rho = 5/16$ dla a) rozkładu wykładniczego z parametrem λ , b) rozkładu Bernoulliego z parametrami $4, 1/2$, c) rozkładu Poissona z parametrem 1 .

3. Zmienna losowa X ma rozkład zadany przez równości

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X = 5) = \frac{1}{6}.$$

Obliczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(2X - 1)$.

4. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{1+x^2} 1_{[0,1]}(x)$. Obliczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(3 - 2X)$.

5. Z urny zawierającej n kul ponumerowanych liczbami od 1 do n losujemy dwa razy po jednej kuli ze zwracaniem. Niech X oznacza największy z numerów, który się pojawił na wylosowanych kulach. Wyznaczyć rozkład zmiennej X oraz obliczyć $\mathbb{E}X$.

Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

1. Podać definicję kwantyla rzędu ρ rozkładu zmiennej losowej X .

2. Zmienna losowa X ma rozkład skoncentrowany na zbiorze $\{1, 2, \dots, 10\}$, zadany przez

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = \dots = \mathbb{P}(X = 10) = p.$$

Obliczyć p , $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(4X + 5)$.

3. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = 2x^{-3} 1_{[1,\infty)}(x)$. Obliczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(1 - X)$.

4. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = C\sqrt{x} 1_{[0,1]}(x)$. Obliczyć C , $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(5X + 2)$.

5. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = \frac{C}{1+x} 1_{[1,5]}(x)$. Obliczyć C , $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(4X + 3)$.

Dwa dodatkowe zadania

1. W pojemniku znajduje się pewna losowa liczba monet: liczba ta jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem 3 . Każda z monet, niezależnie od pozostałych, może być prawidłowa lub nie (każda z tych możliwości ma prawdopodobieństwo $1/2$). Niech X oznacza liczbę prawidłowych monet w pojemniku. Wyznaczyć rozkład zmiennej X .

2. Zmienna losowa X ma rozkład geometryczny z parametrem $p \in (0, 1)$ (tzn. $\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$). Obliczyć $\mathbb{E}X$.