

RP WNE 2008/2009, zadania na pierwszą kartkówkę

1. Z urny, w której znajduje się 10 białych kul ponumerowanych od 1 do 10 i 10 czarnych kul ponumerowanych od 1 do 10, ciągniemy bez zwracania 4 kule. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kul pewne dwie będą miały ten sam numer?

2. Dziesięć osób, wśród których są osoby A, B, C , siadają przy okrągłym stole. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że żadne dwie osoby spośród A, B, C nie będą siedzieć obok siebie?

3. Każda z osób A, B, C, D wykonuje po dwa rzuty kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że każda z osób co najmniej raz wyrzuci parzystą liczbę oczek?

Wskazówka: Warto skorzystać ze wzoru włączeń i wyłączeń.

4. Wykonujemy cztery rzuty prawidłową monetą, przy czym przerywamy rzucanie gdy pojawi się orzeł. Jakie jest prawdopodobieństwo, że rzucono cztery razy, jeśli wiadomo, że w pierwszych dwóch rzutach wypadły reszki?

5. W kolejce ustawia się 15 osób, wśród których są osoby A, B, C . Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba A będzie stała bezpośrednio przed osobą B , jeśli osoba B stoi bezpośrednio przed osobą C ?

6. Z odcinka $[0, 1]$ wybieramy losowo dwa punkty, dzielące ten odcinek na trzy przedziały (przy czym środkowy przedział może być „zdegenerowany”, tzn. może składać się z jednego punktu - dzieje się tak, gdy wylosowane dwa punkty pokrywają się). Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że punkt $2/3$ leży wewnątrz środkowego odcinka?

7. Zdarzenia A, B spełniają warunki: $\mathbb{P}(A \cap B') = 1/3$, $2\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A' \cup B') = 5/6$. Wyznaczyć $\mathbb{P}(A \cap B)$.

8. Niech k, n , $k \leq n$, będą ustalonymi liczbami całkowitymi większymi niż 3. Ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ losujemy bez zwracania k liczb.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że za ostatnim razem wylosowano największą liczbę ze wszystkich wyciągniętych?

b) Czy wśród zdarzeń A - za pierwszym razem wyciągnięto 1, B - za drugim razem wyciągnięto parzystą liczbę, C - za trzecim razem wyciągnięto co najmniej 3, są jakieś dwa niezależne?

9. Z urny, w której znajduje się 5 białych i 6 czarnych kul, losujemy ze zwracaniem 4 kule. Czy zdarzenia: A - za pierwszym i drugim razem wylosowano kule białe oraz B - za trzecim i czwartym razem wylosowano kule przeciwnego koloru niż za drugim razem, są niezależne?

10. W czteropiętrowym budynku do windy wsiadło 7 osób. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na pewnym piętrze nie wysiądzie żadna osoba?

Wskazówka: Warto skorzystać ze wzoru włączeń i wyłączeń.

11. Obliczyć całki:

$$\text{a) } \int_0^\pi x \cos x dx, \quad \text{b) } \int_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad \text{c) } \int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}} dx.$$

Odpowiedzi: 1. $99/323$; 2. $1/2$; 3. $81/256$; 4. $1/2$; 5. $1/14$; 6. $4/9$; 7. $1/12$; 8. $1/k$; wszystkie zdarzenia są parami zależne; 9. Zdarzenia są zależne; 10. $1997/4^7$; 11. a) 2 ; b) 1 ; c) $(\sqrt{76} - 1)/3$.