Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa, 8 lutego 2013r.

Wersja I

Instrukcja:

- Uważnie przeczytaj treści zadań. W szczególności zwróć uwagę jakie polecenia są do wykonania w danym zadaniu.
- Rozwiązanie każdego zadania należy pisać na **osobnej kartce**. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie** i DRUKOWANYMI literami imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu i opatrzona numerem wersji i zadania, np.: „Zad. 3. Wersja I".
- W rozwiązaniu zadania należy przedstawić wszystkie obliczenia i objaśnić kluczowe kroki rozumowania (w szczególności opisać rozważane w rozwiązaniu zdarzenia, itp.), przywołać (z nazwy) używane fakty i wzory, etc. Za rozwiązanie zawierające sam wynik końcowy nie będą przyznawane żadne punkty.
- Nie wolno korzystać z notatek, książek czy kalkulatorów.
- W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy, sprawdzian może zostać przerwany a praca anulowana.
- Czas pisania egzaminu: 150 minut

---

1. Pewien malarz tworzy obrazy w następujący sposób: wybiera losowo punkt (X, Y) z białego kwadratowego płótna $[0,1] \times [0,1]$, a następnie lewy dolny róg płótna (obszar poniżej i na lewo od punktu (X, Y)) maluje na zielono, zaś prawy górny róg płótna (obszar powyżej i na prawo od punktu (X, Y)) maluje na pomarańczowo. Jaką część płótna będzie średnio zajmował kolorowy obszar? (*4 pkt*) Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + Y$ (*4 pkt*).

2. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = (x+y)1_{\{0 \leqslant x \leqslant 1\}}1_{\{0 \leqslant y \leqslant 1\}}$. Wyznaczyć rozkłady zmiennych X i Y (*4 pkt*). Obliczyć kowariancję zmiennych X i Y (*4 pkt*). Czy zmienne X i Y są niezależne? Odpowiedź uzasadnić (*2 pkt*).

3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = \frac{e^{-y}}{y} 1_{\{0<x<y\}}$. Obliczyć $\mathbb{E}(X \mid Y)$ (*4 pkt*), $\mathbb{E}(X^2 \sin(Y) \mid Y)$ (*4 pkt*), oraz $\mathbb{E}X$ (*2 pkt*).

4. Załóżmy, że liczba głównych wygranych w Lotto (trafień szóstek) w pojedynczym losowaniu jest zmienną losową X o rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda = 1/4$. Przypuśćmy, że każdy z posiadaczy wygrywającego losu odbiera swoją nagrodę z prawdopodobieństwem 90%. Niech Y oznacza liczbę odebranych głównych wygranych. Opisać rozkład warunkowy $Y|X = x$ (*2 pkt*). Obliczyć $\mathbb{E}(Y|X)$ (*3 pkt*) oraz $\mathbb{E}Y$ (*2 pkt*).

5. Wykonujemy ciąg rzutów symetryczną monetą. Definiujemy:
   (a) zmienne losowe X_n następująco: $X_n = 1$, jeśli w n-tym rzucie wypadł orzeł, i $X_n = 0$ w przeciwnym przypadku. Zbadać zbieżność ciągu $\frac{X_1+\ldots+X_n}{3n}$ prawie na pewno i wyznaczyć granicę, jeśli istnieje. (*4 pkt*)
   (b) zmienne losowe Y_n następująco: $Y_n = 1$, jeśli w pierwszych n rzutach wypadły same orły, oraz $Y_n = 0$ w przeciwnym przypadku. Zbadać zbieżność ciągu Y_n według prawdopodobieństwa i wyznaczyć granicę, jeśli istnieje. (*4 pkt*)

6. Przypuśćmy, że co drugi klient supermarketu stający przy kasie jest oszczędny, zaś co drugi rozrzutny. Oszacować prawdopodobieństwo, że spośród 200 (niezależnych) klientów stojących przy kasie, co najmniej 100 będzie oszczędnych (*4 pkt*). Przypuśćmy teraz, że podczas jednej wizyty klient oszczędny wydaje średnio 100PLN, przy odchyleniu standardowym 30PLN; zaś klient rozrzutny – średnio 300PLN, z odchyleniem standardowym równym 40PLN. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że 200 klientów (w tym 100 oszczędnych i 100 rozrzutnych) obsłużonych przez pewną kasjerkę zostawi w kasie co najmniej 41 tys. PLN (*5 pkt*).

7. Jacek i Placek grają w następującą grę: rzucają symetryczną monetą, aż wypadnie ciąg ORZEŁ-RESZKA-ORZEŁ, kiedy to wygrywa Jacek, lub ciąg RESZKA-RESZKA-ORZEŁ, kiedy to wygrywa Placek. Jaka jest szansa, że najpóźniej po pierwszych pięciu rzutach Jacek wygra? (*3 pkt*) Który z chłopców ma większą szansę wygranej? (*5 pkt*)