Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 3.02.2016
grupa A

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce, należy oddać 6 kartek. Maksimum punktów można uzyskać za poprawne rozwiązanie 5 zadań z 6. Każde z zadań będzie punktowane w skali $0-10$pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu i oznaczyć wersją egzaminu (np. grupa A). Czas trwania egzaminu: 120 min.

1. Załóżmy, że U_1 i U_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[0,2]$. Niech $X = U_1$ i $Y = \max\{U_1, U_2\}$.
   (a) Wyznacz rozkład łączny wektora (X, Y).
   (b) Oblicz $\mathbb{E}Y$ oraz $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
   (c) Oblicz $\mathbf{P}(X \geqslant Y)$.

2. Zmienne X, Y i Z są zmiennymi losowymi z rozkładu wykładniczego z parametrem $\frac{1}{2}$, przy czym pary X i Y oraz Y i Z są niezależne, lecz jednocześnie Z jest skorelowany z X: $\mathrm{Cov}(X, Z) = 1$.
   (a) Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + Y$.
   (b) Wyznaczyć współczynnik korelacji zmiennych $X + Y$ i Z.
   (c) Wiedząc, że $\mathrm{Cov}(XZ, Y) = 0$ wyznaczyć wariancję zmiennej $X \cdot Y + Z$.

3. Załóżmy, że wektor zmiennych losowych (X, Y) ma rozkład łączny o gęstości $f(x, y)$ zadanej wzorem
$$f(x, y) = c \cdot \mathbf{1}_{(0,4-x^2)}(y) \cdot \mathbf{1}_{(-2,2)}(x).$$
   (a) Wyznacz stałą c.
   (b) Oblicz $\mathbb{E}(Y|X)$.
   (c) Czy X i Y są niezależne? Odpowiedź uzasadnij!

4. Niech $X_1, X_2, ...$ będą zmiennymi losowymi opisującymi kwoty, jakie kolejni przechodnie wrzucają do puszki podczas kwesty WOŚP. Załóżmy, że kwoty te są niezależne, ale wraz z upływem czasu trwania kwesty przechodnie stają się coraz bardziej hojni: $\mathbb{E}X_n = 2n$, przy czym $\mathrm{Var}X_n = 1$. (a) Korzystając z nierówności Czebyszewa-Bienaymé oszacować z góry prawdopodobieństwo, że pierwszych trzech przechodniów wrzuci łącznie do puszki kwotę różniącą się o co najmniej 6 zł od kwoty wrzuconej przez szóstą osobę. (b) Wyznaczyć stałe a i b tak, by dla dużych n wyrażenie $an + b$ możliwie dobrze przybliżało średnią kwotę wrzuconą do puszki w grupie pierwszych n darczyńców, tj. by $\frac{X_1+...+X_n}{n} - (an + b) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$.

5. W grze w ruletkę 18 pól oznaczonych jest na czerwono, 18 na czarno, a 2 na zielono. Możemy obstawiać kwotę x zł, że kulka zatrzyma sie na polu czerwonym lub że zatrzyma się na czarnym. Jeśli kulka zatrzyma się na polu którego kolor obstawialiśmy, wygrywamy x zł a w przeciwnym wypadku tracimy postawione x zł. Wchodząc do kasyna mamy 1444 zł. Oblicz przybliżone prawdopodobieństwo, że po obstawieniu 1444 razy po 1 zł uda nam sie pozostać nad kreską, czyli dysponować kapitałem co najmniej takim z jakim przyszliśmy do kasyna. Oblicz analogiczne prawdopodobieństwo dla strategii polegającej na obstawianiu 361 razy po 4 zł. Która strategia jest lepsza? Odpowiedź uzasadnij.

6. Załóżmy, że zmiany na stanowisku prezesa pewnej państwowej spółki przebiegają w następujący sposób. Jest czterech fachowców, którzy mogą pełnić tę funkcję, przy czym dwóch (ozn. A_1, A_2) sprzyja partii A, zaś pozostałych dwóch (ozn. B_1, B_2) – partii B. W przypadku, gdy w danym kwartale nie są przeprowadzane wybory, przewodniczący aktualnie urzędującej partii decyduje, czy obecny prezes spółki zostaje na stanowisku (z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$), czy też następuje zmiana na innego fachowca z tej samej opcji politycznej. Jednak z prawdopodobieństwem $\frac{1}{12}$ w każdym kwartale mogą odbywać się wybory, w których następuje zmiana partii rządzącej; wówczas oczywiście następuje zmiana prezesa na fachowca numer 1 z drugiej partii. Wyznaczyć:
   (a) prawdopodobieństwo, że fachowiec A_1, który pełnił funkcję w I kwartale 2016 roku, będzie ją pełnił przez kolejne 3 kwartały;
   (b) prawdopodobieństwo, że jeśli mechanizm ten działa od dłuższego czasu, to w I kwartale 2016 roku funkcję pełni fachowiec A_1;
   (c) średni czas (liczony w kwartałach) jaki upłynie od I kwartału 2016 roku, kiedy funkcję sprawuje fachowiec A_1, do przejęcia tej funkcji przez B_1.

$\Phi(0) = 0{,}5$, $\Phi(1) \approx 0{,}841$, $\Phi(1{,}5) \approx 0{,}933$, $\Phi(2) \approx 0{,}977$, $\Phi(2{,}5) \approx 0{,}994$, $\Phi(3) \approx 0{,}9987$, $\Phi(4) \approx 0{,}99997$

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 3.02.2016
grupa B

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce, należy oddać 6 kartek. Maksimum punktów można uzyskać za poprawne rozwiązanie 5 zadań z 6. Każde z zadań będzie punktowane w skali $0-10$pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu i oznaczyć wersją egzaminu (np. grupa B). Czas trwania egzaminu: 120 min.

1. Załóżmy, że T_1 i T_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[0,1]$. Niech $X = T_1$ i $Y = \max\{T_1, T_2\}$.
   (a) Wyznacz rozkład łączny wektora (X,Y).
   (b) Oblicz $\mathbb{E}Y$ oraz $\mathrm{Cov}(X,Y)$
   (c) Oblicz $\mathbf{P}(Y \geqslant X)$.

2. Zmienne X, Y i Z są zmiennymi losowymi z rozkładu wykładniczego z parametrem $\frac{1}{3}$, przy czym pary X i Z oraz Y i Z są niezależne, lecz jednocześnie X jest skorelowany z Y: $\mathrm{Cov}(X,Y) = 1$.
   (a) Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + Z$.
   (b) Wyznaczyć współczynnik korelacji zmiennych $X + Z$ i Y.
   (c) Wiedząc, że $\mathrm{Cov}(XY, Z) = 0$ wyznaczyć wariancję zmiennej $X \cdot Z + Y$.

3. Załóżmy, że wektor zmiennych losowych (X,Y) ma rozkład łączny o gęstości $f(x,y)$ zadanej wzorem
$$f(x,y) = c \cdot \mathbf{1}_{(-1,1)}(y) \cdot \mathbf{1}_{(1-y^2,1)}(x).$$
   (a) Wyznacz stałą c.
   (b) Oblicz $\mathbb{E}(X|Y)$.
   (c) Czy X i Y są niezależne? Odpowiedź uzasadnij!

4. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą zmiennymi losowymi opisującymi kwoty, jakie kolejni przechodnie wrzucają do puszki podczas kwesty WOŚP. Załóżmy, że kwoty te są niezależne, ale wraz z upływem czasu trwania kwesty przechodnie stają się coraz bardziej hojni: $\mathbb{E}X_n = 3n$, przy czym $\mathrm{Var}X_n = 3$. (a) Korzystając z nierówności Czebyszewa-Bienaymé oszacować z góry prawdopodobieństwo, że pierwszych pięciu przechodniów wrzuci łącznie do puszki kwotę różniącą się o co najmniej 8 zł od kwoty wrzuconej przez piętnastą osobę. (b) Wyznaczyć stałe a i b tak, by dla dużych n wyrażenie $an + b$ możliwie dobrze przybliżało średnią kwotę wrzuconą do puszki w grupie pierwszych n darczyńców, tj. by $\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} - (an+b) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$.

5. W grze w ruletkę 18 pól jest oznaczonych liczbami parzystymi, 18 jest oznaczonych liczbami nieparzystymi, a 2 oznaczone są inaczej. Możemy obstawiać kwotę x zł, że kulka zatrzyma sie na polu parzystym lub że zatrzyma się na nieparzystym. Jeśli kulka zatrzyma się na polu którego parzystość obstawiliśmy, wygrywamy x zł a w przeciwnym wypadku tracimy postawione x zł. Wchodząc do kasyna mamy 3249 zł. Oblicz przybliżone prawdopodobieństwo, że po obstawieniu 3249 razy po 1 zł będziemy pod kreską, tj. będziemy dysponować kapitałem mniejszym niż początkowy. Oblicz analogiczne prawdopodobieństwo dla strategii polegającej na obstawianiu 361 razy po 9 zł. Która strategia jest lepsza? Odpowiedź uzasadnij.

6. Załóżmy, że zmiany na stanowisku prezesa pewnej państwowej spółki przebiegają w następujący sposób. Jest czterech fachowców, którzy mogą pełnić tę funkcję, przy czym dwóch (ozn. A_1, A_2) sprzyja partii A, zaś pozostałych dwóch (ozn. B_1, B_2) – partii B. W przypadku, gdy w danym kwartale nie są przeprowadzane wybory, przewodniczący aktualnie urzędującej partii decyduje, czy obecny prezes spółki zostaje na stanowisku (z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$), czy też następuje zmiana na innego fachowca z tej samej opcji politycznej. Jednak z prawdopodobieństwem $\frac{1}{10}$ w każdym kwartale mogą odbywać się wybory, w których następuje zmiana partii rządzącej; wówczas oczywiście następuje zmiana prezesa na fachowca numer 1 z drugiej partii. Wyznaczyć:
   (a) prawdopodobieństwo, że fachowiec B_2, który pełnił funkcję w I kwartale 2016 roku, będzie ją pełnił przez kolejne 3 kwartały;
   (b) prawdopodobieństwo, że jeśli mechanizm ten działa od dłuższego czasu, to w I kwartale 2016 roku funkcję pełni fachowiec B_2;
   (c) średni czas (liczony w kwartałach) jaki upłynie od I kwartału 2016 roku, kiedy funkcję sprawuje fachowiec B_2, do przejęcia tej funkcji przez A_1.

$\Phi(0) = 0{,}5$, $\Phi(1) \approx 0{,}841$, $\Phi(1{,}5) \approx 0{,}933$, $\Phi(2) \approx 0{,}977$, $\Phi(2{,}5) \approx 0{,}994$, $\Phi(3) \approx 0{,}9987$, $\Phi(4) \approx 0{,}99997$

‘

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 3.02.2016
grupa C

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce, należy oddać 6 kartek. Maksimum punktów można uzyskać za poprawne rozwiązanie 5 zadań z 6. Każde z zadań będzie punktowane w skali $0-10$pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu i oznaczyć wersją egzaminu (np. grupa C). Czas trwania egzaminu: 120 min.

1. Załóżmy, że U_1 i U_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[0,2]$. Niech $X = \max\{U_1, U_2\}$ i $Y = U_2$.
   (a) Wyznacz rozkład łączny wektora (X,Y).
   (b) Oblicz $\mathbb{E}X$ oraz $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
   (c) Oblicz $\mathbf{P}(X \geqslant Y)$.

2. Zmienne X, Y i Z są zmiennymi losowymi z rozkładu wykładniczego z parametrem $\frac{1}{4}$, przy czym pary X i Y oraz X i Z są niezależne, lecz jednocześnie Z jest skorelowany z Y: $\mathrm{Cov}(Y,Z) = 1$.
   (a) Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + Z$.
   (b) Wyznaczyć współczynnik korelacji zmiennych $X + Z$ i Y.
   (c) Wiedząc, że $\mathrm{Cov}(YZ, X) = 0$ wyznaczyć wariancję zmiennej $Y \cdot X + Z$.

3. Załóżmy, że wektor zmiennych losowych (X,Y) ma rozkład łączny o gęstości $f(x,y)$ zadanej wzorem
$$f(x,y) = c \cdot \mathbf{1}_{(4-x^2,4)}(y) \cdot \mathbf{1}_{(-2,2)}(x).$$
   (a) Wyznacz stałą c.
   (b) Oblicz $\mathbb{E}(Y|X)$.
   (c) Czy X i Y są niezależne? Odpowiedź uzasadnij!

4. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą zmiennymi losowymi opisującymi kwoty, jakie kolejni przechodnie wrzucają do puszki podczas kwesty WOŚP. Załóżmy, że kwoty te są niezależne, ale wraz z upływem czasu trwania kwesty przechodnie stają się coraz bardziej hojni: $\mathbb{E}X_n = n+2$, przy czym $\mathrm{Var}X_n = 1$. (a) Korzystając z nierówności Czebyszewa oszacować z góry prawdopodobieństwo, że pierwszych czterech przechodniów wrzuci łącznie do puszki kwotę różniącą się o co najmniej 5 zł od kwoty wrzuconej przez szesnastą osobę. (b) Wyznaczyć stałe a i b tak, by dla dużych n wyrażenie $an + b$ możliwie dobrze przybliżało średnią kwotę wrzuconą do puszki w grupie pierwszych n darczyńców, tj. by $\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} - (an+b) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$.

5. W grze w ruletkę 18 pól oznaczonych jest na czerwono, 18 na czarno, a 2 na zielono. Możemy obstawiać kwotę x zł, że kulka zatrzyma sie na polu czerwonym lub że zatrzyma się na czarnym. Jeśli kulka zatrzyma się na polu którego kolor obstawialiśmy, wygrywamy x zł a w przeciwnym wypadku tracimy postawione x zł. Wchodząc do kasyna mamy 1444zł. Oblicz przybliżone prawdopodobieństwo, że po obstawieniu 1444 razy po 1 zł będziemy pod kreską, czyli będziemy dysponować kapitałem niższym niż początkowy. Oblicz analogiczne prawdopodobieństwo dla strategii polegającej na obstawianiu 361 razy po 4 zł. Która strategia jest lepsza? Odpowiedź uzasadnij.

6. Załóżmy, że zmiany na stanowisku prezesa pewnej państwowej spółki przebiegają w następujący sposób. Jest czterech fachowców, którzy mogą pełnić tę funkcję, przy czym dwóch (ozn. A_1, A_2) sprzyja partii A, zaś pozostałych dwóch (ozn. B_1, B_2) – partii B. W przypadku, gdy w danym kwartale nie są przeprowadzane wybory, przewodniczący aktualnie urzędującej partii decyduje, czy obecny prezes spółki zostaje na stanowisku (z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$), czy też następuje zmiana na innego fachowca z tej samej opcji politycznej. Jednak z prawdopodobieństwem $\frac{1}{12}$ w każdym kwartale mogą odbywać się wybory, w których następuje zmiana partii rządzącej; wówczas oczywiście następuje zmiana prezesa na fachowca numer 1 z drugiej partii. Wyznaczyć:
   (a) prawdopodobieństwo, że fachowiec A_2, który pełnił funkcję w I kwartale 2016 roku, będzie ją pełnił przez kolejne 3 kwartały;
   (b) prawdopodobieństwo, że jeśli mechanizm ten działa od dłuższego czasu, to w I kwartale 2016 roku funkcję pełni fachowiec A_2;
   (c) średni czas (liczony w kwartałach) jaki upłynie od I kwartału 2016 roku, kiedy funkcję sprawuje fachowiec A_2, do przejęcia tej funkcji przez B_1.

$\Phi(0) = 0{,}5$, $\Phi(1) \approx 0{,}841$, $\Phi(1{,}5) \approx 0{,}933$, $\Phi(2) \approx 0{,}977$, $\Phi(2{,}5) \approx 0{,}994$, $\Phi(3) \approx 0{,}9987$, $\Phi(4) \approx 0{,}99997$

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 3.02.2016
grupa D

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce, należy oddać 6 kartek. Maksimum punktów można uzyskać za poprawne rozwiązanie 5 zadań z 6. Każde z zadań będzie punktowane w skali $0-10$*pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu i oznaczyć wersją egzaminu (np. grupa D). Czas trwania egzaminu: 120 min.*

1. Załóżmy, że T_1 i T_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[0,1]$. Niech $X = \max\{T_1, T_2\}$ i $Y = T_2$.
   (a) Wyznacz rozkład łączny wektora (X,Y).
   (b) Oblicz $\mathbb{E}Y$ oraz $\mathrm{Cov}(X,Y)$
   (c) Oblicz $\mathbf{P}(Y \geqslant X)$.

2. Zmienne X, Y i Z są zmiennymi losowymi z rozkładu wykładniczego z parametrem $\frac{1}{5}$, przy czym pary X i Z oraz Y i Z są niezależne, lecz jednocześnie X jest skorelowany z Y: $\mathrm{Cov}(X,Y) = 1$.
   (a) Wyznaczyć rozkład zmiennej $X+Z$.
   (b) Wyznaczyć współczynnik korelacji zmiennych $X+Z$ i Y.
   (c) Wiedząc, że $\mathrm{Cov}(XY, Z) = 0$ wyznaczyć wariancję zmiennej $Y \cdot Z + X$.

3. Załóżmy, że wektor zmiennych losowych (X,Y) ma rozkład łączny o gęstości $f(x,y)$ zadanej wzorem
$$f(x,y) = c \cdot \mathbf{1}_{(-1,1)}(y) \cdot \mathbf{1}_{(0,1-y^2)}(x).$$
   (a) Wyznacz stałą c.
   (b) Oblicz $\mathbb{E}(X|Y)$.
   (c) Czy X i Y są niezależne? Odpowiedź uzasadnij!

4. Niech $X_1, X_2, ...$ będą zmiennymi losowymi opisującymi kwoty, jakie kolejni przechodnie wrzucają do puszki podczas kwesty WOŚP. Załóżmy, że kwoty te są niezależne, ale wraz z upływem czasu trwania kwesty przechodnie stają się coraz bardziej hojni: $\mathbb{E}X_n = n+1$, przy czym $\mathrm{Var}X_n = 2$. (a) Korzystając z nierówności Czebyszewa oszacować z góry prawdopodobieństwo, że pierwszych dwóch przechodniów wrzuci łącznie do puszki kwotę różniącą się o co najmniej 4 zł od kwoty wrzuconej przez czwartą osobę. (b) Wyznaczyć stałe a i b tak, by dla dużych n wyrażenie $an+b$ możliwie dobrze przybliżało średnią kwotę wrzuconą do puszki w grupie pierwszych n darczyńców, tj. by $\frac{X_1+...+X_n}{n} - (an+b) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$.

5. W grze w ruletkę 18 pól jest oznaczonych liczbami parzystymi, 18 jest oznaczonych liczbami nieparzystymi, a 2 oznaczone są inaczej. Możemy obstawiać kwotę x zł, że kulka zatrzyma sie na polu parzystym lub że zatrzyma się na nieparzystym. Jeśli kulka zatrzyma się na polu którego parzystość obstawiliśmy, wygrywamy x zł a w przeciwnym wypadku tracimy postawione x zł. Wchodząc do kasyna mamy 3249 zł. Oblicz przybliżone prawdopodobieństwo, że po obstawieniu 3249 razy po 1 zł uda nam sie pozostać nad kreską, czyli dysponować kapitałem co najmniej takim z jakim przyszliśmy do kasyna. Oblicz analogiczne prawdopodobieństwo dla strategii polegającej na obstawianiu 361 razy po 9 zł. Która strategia jest lepsza? Odpowiedź uzasadnij.

6. Załóżmy, że zmiany na stanowisku prezesa pewnej państwowej spółki przebiegają w następujący sposób. Jest czterech fachowców, którzy mogą pełnić tę funkcję, przy czym dwóch (ozn. A_1, A_2) sprzyja partii A, zaś pozostałych dwóch (ozn. B_1, B_2) – partii B. W przypadku, gdy w danym kwartale nie są przeprowadzane wybory, przewodniczący aktualnie urzędującej partii decyduje, czy obecny prezes spółki zostaje na stanowisku (z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$), czy też następuje zmiana na innego fachowca z tej samej opcji politycznej. Jednak z prawdopodobieństwem $\frac{1}{10}$ w każdym kwartale mogą odbywać się wybory, w których następuje zmiana partii rządzącej; wówczas oczywiście następuje zmiana prezesa na fachowca numer 1 z drugiej partii. Wyznaczyć:
   (a) prawdopodobieństwo, że fachowiec B_1, który pełnił funkcję w I kwartale 2016 roku, będzie ją pełnił przez kolejne 3 kwartały;
   (b) prawdopodobieństwo, że jeśli mechanizm ten działa od dłuższego czasu, to w I kwartale 2016 roku funkcję pełni fachowiec B_1;
   (c) średni czas (liczony w kwartałach) jaki upłynie od I kwartału 2016 roku, kiedy funkcję sprawuje fachowiec B_1, do przejęcia tej funkcji przez A_1.

$\Phi(0) = 0{,}5$, $\Phi(1) \approx 0{,}841$, $\Phi(1{,}5) \approx 0{,}933$, $\Phi(2) \approx 0{,}977$, $\Phi(2{,}5) \approx 0{,}994$, $\Phi(3) \approx 0{,}9987$, $\Phi(4) \approx 0{,}99997$