Zestaw zadań testowych z Analizy Funkcjonalnej

1. Załóżmy, że X, Y są przestrzeniami Banacha.

☐ Jeśli X jest skończenie wymiarowa, to każde przekształcenie liniowe $T : X \to Y$ jest ciągłe.

☐ Jeśli Y jest skończenie wymiarowa, to każde przekształcenie liniowe $T : X \to Y$ jest ciągłe.

☐ Jeśli każde przekształcenie liniowe $T : X \to Y$ jest ciągłe, to X jest skończenie wymiarowa.

2. Rozważamy przestrzeń c_0 z normą supremum $\|\cdot\|_\infty$.

☐ Zbiór $X = \left\{ (x_n)_{n\geq 1} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$ jest domkniętą podprzestrzenią c_0.

☐ Zbiór $X = \left\{ (x_n)_{n\geq 1} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \leq 1 \right\}$ jest domkniętą podprzestrzenią c_0.

☐ Zbiór $X = \left\{ (x_n)_{n\geq 1} \in c_0 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2} = 0 \right\}$ jest domkniętą podprzestrzenią c_0.

3. Niech $X \neq \{0\}$ będzie podprzestrzenią domkniętą ℓ_2.

☐ Zachodzi tożsamość $X = (X^\perp)^\perp$.

☐ Operator identyczności Id oraz rzut ortogonalny P_X spełniają warunek $\|Id + P_X\| = 2$.

☐ Istnieje funkcjonał $\varphi \in X^*$ spełniający $\|\varphi\|_{X^*} = 1$ oraz $\varphi|_{X^\perp} = 0$.

4. Dane są funkcje $f(x) = x\chi_{[0,\pi]}(x)$, $g(x) = 1$ oraz $h(x) = x$, dla $x \in [-\pi, \pi]$.

☐ Rozwinięcie f w szereg Fouriera w $L_2(-\pi, \pi)$ to

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin nx - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

☐ Zachodzi równość $\operatorname{dist}(h, \operatorname{lin}(f, g)) = 1/2$.

☐ Przestrzeń $\{f\}^\perp \cap \{g\}^\perp$ jest nieskończenie wymiarowa.

5. Niech T będzie operatorem działającym na nieskończonych ciągach $(x_n)_{n\geq 1}$ wzorem $Tx = (x_2 - x_1, x_3 - x_2, x_4 - x_3, \ldots)$.

☐ T jest ciągły jako operator z c_{00} w c_{00}.

☐ T jest ciągły jako operator z ℓ_1 w ℓ_3.

☐ Obraz $T(c_0)$ jest domkniętą podprzestrzenią c.

6. Rozważamy układ Rademachera $(r_n)_{n\geq 1}$ oraz układ Haara $(h_n)_{n\geq 0}$ na $L_2(0, 1)$.

☐ Rzut wektora h_5 na podprzestrzeń rozpinaną przez $(r_n)_{n\geq 1}$ wynosi (proszę wpisać ile).

☐ Norma operatora T na $L_2(0, 1)$, danego wzorem $T\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} r_n$, jest równa 1.

☐ Istnieje nieskończenie wiele funkcjonałów $\varphi \in L_2(0, 1)^*$, spełniających $\|\varphi\| = 1$ oraz $\varphi(r_n) = 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$.

7. Dla $n = 1, 2, \ldots$, rozważamy ciąg $x_n = (0, 0, \ldots, 0, n^{-1/2}, 0, \ldots)$, gdzie jedyny niezerowy wyraz znajduje się na n-tym miejscu.

☐ Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ zbiega w ℓ_p wtedy i tylko wtedy, gdy $p > 2$.
☐ Istnieje funkcjonał $\varphi \in c_0^*$ spełniający $\varphi(x_n) = n^{-1/2}$ dla nieskończenie wielu n.
☐ Istnieje funkcjonał $\varphi \in c_0^*$ spełniający $\varphi(x_n) = n^{-1}$ dla nieskończenie wielu n.

8. Niech $X = \{f \in C[0,1] : f(0) = f(1) = 0\}$.

☐ Przestrzeń X, traktowana jako podprzestrzeń $L_\infty(0,1)$, jest domknięta.
☐ Przestrzeń X, traktowana jako podprzestrzeń $L_6(0,1)$, jest gęsta.
☐ Wprowadźmy na X topologię pochodzącą od normy supremum. Wówczas operator $T : X \to X$ dany wzorem $Tf(x) = (1-x)\int_0^x f$, ma obraz gęsty w X.

9. Dana jest przestrzeń Hilberta H oraz operator liniowy ciągły $T : H \to H$, spełniający warunek $\langle Tx, x\rangle \geq \|x\|^2$ dla wszystkich $x \in H$.

☐ Przestrzeń $T(H)$ (obraz operatora T) jest domknięty.
☐ $T(H) = H$.
☐ T jest izomorfizmem.

10. Dla dwóch przestrzeni Banacha X, Y, mówimy, że X wkłada się izomorficznie w Y, jeśli istnieje przekształcenie liniowe $T : X \to Y$ oraz stałe c_1, $c_2 > 0$ takie, że $c_1\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq c_2\|x\|_X$ dla wszystkich $x \in X$. Mówimy, że X wkłada się izometrycznie w Y, jeśli istnieje przekształcenie liniowe $T : X \to Y$ spełniające warunek $\|Tx\|_Y = \|x\|_X$ dla wszystkich $x \in X$.

☐ Dla $1 \leq p \leq \infty$, przestrzeń ℓ_p wkłada się izometrycznie w $L_p(0,1)$.
☐ Dla $1 \leq p \leq \infty$, przestrzeń ℓ_2 wkłada się izomorficznie w $L_p(0,1)$.
☐ Dla $1 \leq p \leq \infty$, przestrzeń ℓ_2 wkłada się izometrycznie w $L_p(0,1)$.

11. Przestrzenie Banacha X, Y są izomorficzne, jeśli istnieje bijektywne przekształcenie liniowe $T : X \to Y$ oraz stałe c_1, $c_2 > 0$, spełniające warunek $c_1\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq c_2\|x\|_X$ dla wszystkich $x \in X$. Przestrzenie są izometryczne, jeśli istnieje bijektywne przekształcenie liniowe $T : X \to Y$ spełniające $\|Tx\|_Y = \|x\|_X$ dla wszystkich $x \in X$.

☐ Przestrzeń c_0 jest izomorficzna z ℓ_1.
☐ Przestrzeń $X = \{x \in \ell_2 : x_2 + x_3 - x_{10} + \sqrt{2}x_{11} = 0,\ x_5 + x_8 = 0\}$ jest izometryczna z ℓ_2.
☐ Przestrzenie $L_p(0,1)$ oraz $L_p(\mathbb{R})$ są izometryczne.

12. Załóżmy, że H jest przestrzenią Hilberta, a $T : H \to H$ jest operatorem liniowym ciągłym. Mówimy, że podprzestrzeń $M \subseteq H$ jest niezmiennicza dla T, jeśli $T(M) \subseteq M$.

☐ Jeśli M jest przestrzenią niezmienniczą dla T, to $M^\perp$ także.
☐ Jeśli M jest przestrzenią niezmienniczą dla T, to $\overline{M}$ także.
☐ Załóżmy, że $M \subseteq H$ jest podprzestrzenią domkniętą. Wtedy przestrzenie M oraz $M^\perp$ są niezmiennicze dla T wtedy i tylko wtedy, gdy $TP_M = P_M T$ (P_M oznacza rzut ortogonalny na M).

13. Niech $H = \ell_2$ oraz $V = \{x \in \ell_2 : x_1 + 2x_3 = -2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

☐ $\dim V^\perp = 2$.
☐ Niech $a = (2^{-n})_{n\geq 1} \in \ell_2$. Wówczas $P_V a$, rzut ortogonalny a na V, wynosi (wpisać wynik).

☐ Istnieje nieskończenie wiele funkcjonałów $\varphi \in H^*$ spełniających warunek $V \subseteq \operatorname{Ker} \varphi$.

14. Załóżmy, że X, Y są przestrzeniami Banacha, a $T : X \to Y$ jest przekształceniem liniowym.

☐ Przypuśćmy, że T ma następujacą własność: jeśli ciąg $(x_n)_{n\geq 1}$ o wyrazach w X zbiega do 0, to $(Tx_n)_{n\geq 0}$ także zbiega do 0. Wynika stąd, że T jest ciągły.

☐ Przypuśćmy, że T ma następujacą własność: jeśli ciąg $(x_n)_{n\geq 1}$ o wyrazach w X zbiega do 0, to $(Tx_n)_{n\geq 0}$ jest ograniczony. Wynika stąd, że T jest ciągły.

☐ Przypuśćmy, że T ma następujacą własność: jeśli ciąg $(x_n)_{n\geq 1}$ o wyrazach w X jest ograniczony, to $(Tx_n)_{n\geq 0}$ także jest ograniczony. Wynika stąd, że T jest ciągły.

15. Załóżmy, że $A = \{x \in \ell_1 \,:\, x_{2n} = 0 \text{ dla } n \geq 1\}$, $B = \{x \in \ell_1 \,:\, x_{2n-1} = 2^n x_{2n} \text{ dla } n \geq 1\}$, zaś wektor $c = (c_n)_{n\geq 1} \in \ell_1$ dany jest wzorem $c_{2n-1} = 0$ oraz $c_{2n} = 2^{-n}$ dla $n \geq 1$.

☐ $A - c$ i B są domkniętymi podzbiorami wypukłymi ℓ_1.

☐ $A - c$ oraz B są rozłączne.

☐ Istnieje funkcjonał $\varphi \in X^*$ spełniający warunek $\varphi(a) < \inf_{b\in B} \varphi(b)$ dla dowolnego $a \in A-c$.

16. Załóżmy, że A, B są niepustymi, rozłącznymi, wypukłymi podzbiorami $\mathbb{R}^n$.

☐ Istnieje funkcjonał $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$ spełniający warunek $\varphi(a) < \inf_{b\in B} \varphi(b)$ dla dowolnego $a \in A$.

☐ Istnieje funkcjonał $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$ spełniający warunek $\varphi(a) \leq \inf_{b\in B} \varphi(b)$ dla dowolnego $a \in A$.

☐ Jeśli B jest otwarty, to istnieje funkcjonał $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$ spełniający warunek $\varphi(a) < \inf_{b\in B} \varphi(b)$ dla dowolnego $a \in A$.

17. Załóżmy, że X jest przestrzenią unormowaną.

☐ Jeśli x_1, $x_2 \in X$ spełniają warunek $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ dla dowolnego $\varphi \in X^*$, to $x_1 = x_2$.

☐ Przypuśćmy, że A jest niepustym, ograniczonym podzbiorem X. Wówczas dla dowolnego $\varphi \in X^*$, obraz $\varphi(A)$ jest ograniczony.

☐ Przypuśćmy, że A jest niepustym podzbiorem X o tej własności, że dla dowolnego $\varphi \in X^*$, obraz $\varphi(A)$ jest ograniczony. Wynika stąd, że A jest ograniczony.

18. Niech $C^1[0,1]$ oznacza przestrzeń funkcji ciągłych z $[0,1]$ w $\mathbb{R}$, które są różniczkowalne na $(0,1)$ i których pochodna przedłuża się do funkcji ciągłej na $[0,1]$. Przestrzeń tę wyposażamy w normę $\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_\infty$.

☐ Operator identyczności $Id : C^1[0,1] \hookrightarrow C[0,1]$ (tj. dany wzorem $Id(f) = f$) jest ciągły.

☐ Istnieje funkcjonał $\varphi \in (C^1[0,1])^*$, $\varphi \neq 0$, zerujący się na podprzestrzeni wielomianów stopnia większego niż 5.

☐ Funkcja $g \in C^1[0,1]$ dana wzorem $g(x) = x$ jest odległa od podprzestrzeni $M = \{f \in C^1[0,1] \,:\, \int_0^1 f = f(1)\}$ o nie więcej niż 1.

19. Dana jest przestrzeń unormowana X oraz funkcjonał $\varphi \in X^*$.

☐ Załóżmy, że φ nie przyjmuje na kuli $B(0,4)$ wartości 2024. Wynika stąd, że $\|\varphi\| \leq 506$.

☐ Dla dowolnego $x \in X$ zachodzi tożsamość $|\varphi(x)| = \|\varphi\| \operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} \varphi)$.

☐ Istnieje wektor $x \neq 0$ spełniający warunek $|\varphi(x)| = \|\varphi\|\|x\|$.

20. Dla ustalonego $1 \le p \le \infty$, rozważmy przestrzeń $\ell_p^2 = \mathbb{R}^2$ z normą

$$\|(x,y)\|_p = \begin{cases} (|x|^p + |y|^p)^{1/p} & \text{gdy } 1 \le p < \infty, \\ \max\{|x|,|y|\} & \text{gdy } p = \infty, \end{cases}$$

jej podprzestrzeń $Z = \{(x,y) \in \ell_p^2 : y = 0\}$ oraz funkcjonał $\varphi \in Z^*$ dany wzorem $\varphi(x,y) = x$ dla $(x,y) \in Z$.

☐ Gdy $p \in (1,\infty]$, to funkcjonał φ ma jedyne przedłużenie Hahna–Banacha (tzn. takie przedłużenie liniowe ψ, że $\|\psi\| = \|\varphi\|$), i jest ono zadane wzorem $\psi(x,y) = x$.

☐ Gdy $p = 1$, to istnieje wiele przedłużeń Hahna–Banacha funkcjonału φ, i każde z nich jest zadane wzorem postaci $\psi(x,y) = x + cy$, gdzie $c \in [-1,1]$.

☐ Istnieje podprzestrzeń Y przestrzeni ℓ_∞^2 i funkcjonał $\varphi \in Y^*$ posiadający wiele przedłużeń Hahna–Banacha.

21. Dany jest ciąg $(x_n)_{n\ge1}$ niezerowych wektorów z ustalonej przestrzeni Hilberta H.

☐ Istnieje izometria $T : H \to H$ spełniająca $T(x_1^\perp) = x_2^\perp$.

☐ Jeśli istnieje $x \in H$ spełniający warunki $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$ oraz $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$ dla wszystkich $\varphi \in H^*$, to $x_n \to x$.

☐ Jeśli granice $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|$ oraz $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)$ dla wszystkich $\varphi \in H^*$, to ciąg $(x_n)_{n\ge1}$ jest zbieżny.

22. Załóżmy, że X, Y są przestrzeniami unormowanymi, a $T : X \to Y$ jest operatorem liniowym.

☐ T jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy $T^{-1}(0)$ jest podprzestrzenią domkniętą.

☐ Jeśli $Y = \mathbb{R}$, to T jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy $T^{-1}(0)$ jest podprzestrzenią domkniętą.

☐ Jeśli $\dim Y < \infty$, to T jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy $T^{-1}(0)$ jest podprzestrzenią domkniętą.

23. Rozważamy podprzestrzeń $V = \left\{ f \in L^2(-1,1) \,:\, \int_{-1}^1 x f(x) \mathrm{d}x = \int_{-1}^1 x^5 f(x) \mathrm{d}x = 0 \right\}$.

☐ Układ $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x^2 - 1/3$, $f_3(x) = x^4 - 1/5$ jest ortogonalnym układem w V.

☐ Podprzestrzeń rozpinana przez wielomiany $W_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1,5\}$, jest gęsta w V.

☐ Istnieje nieskończony zbiór liniowo niezależnych funkcji nieparzystych, zawarty w V.