Zadania na kartkówkę z Analizy Funkcjonalnej - seria 3

1. Wyznaczyć przestrzeń dualną do ℓ_1^n.

2. Wyznaczyć przestrzeń dualną do c.

3. Niech μ będzie regularną miarą borelowską (ze znakiem) na $[0,1]$, tzn. różnicą dwóch regularnych dodatnich miar borelowskich na $[0,1]$. Wykazać, że jeśli dla każdego $n = 0, 1, 2, \dots$ zachodzi równość $\int_{[0,1]} x^n \, d\mu(x) = 0$, to $\mu = 0$.

4. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ jest zbieżny dla każdego ciągu $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ zbieżnego do zera wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$.

5. Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią Banacha, a $A \subseteq X^*$ takim zbiorem, że dla każdego $x \in X$ zbiór $\{\varphi(x) : \varphi \in A\}$ jest ograniczony w $\mathbb{R}$. Udowodnić, że A jest zbiorem ograniczonym w X^*, tzn. $\sup\{\|\varphi\| : \varphi \in A\} < \infty$.

6. Dany jest ciąg Cauchy'ego $(f_n)_{n\geq 1}$ w $C[0,1]$, zbieżny w słabej topologii do zera. Wykazać, że $(f_n)_{n\geq 1}$ zbiega do zera w normie.

7. Wykazać, że ciąg funkcji Rademachera $r_k := \operatorname{sgn}(\sin 2^k \pi x)$ jest słabo zbieżny do zera w $L^p[0,1]$ dla $1 \leq p < \infty$.

8. Rozważamy ciąg $(x_n)_{n\geq 1} \subset \ell_\infty$, gdzie

$$x_n = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ jedynek}}, 0, 0, 0, \dots).$$

Udowodnić, że $(x_n)_{n\geq 1}$ zbiega słabo* do $(1, 1, 1, \dots)$, ale nie zbiega słabo.

9. Niech $(X, \mathcal{M}, \mu)$ będzie σ-skończoną przestrzenią mierzalną oraz niech $f \in L^1(X, \mathcal{M}\mu)$. Przypuśćmy, że $\mathcal{M}_0$ jest pod-σ-ciałem $\mathcal{M}$. Udowodnić, korzystając z twierdzenia Radona-Nikodyma, że istnieje dokładnie jedna $\mathcal{M}_0$-mierzalna funkcja f_0, taka że

$$\int_A f \, d\mu = \int_A f_0 \, d\mu$$

dla każdego zbioru $A \in \mathcal{M}_0$ spełniającego warunek $\mu(A) < \infty$.

10. Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie refleksywną przestrzenią unormowaną, a $\emptyset \neq K \subseteq X$ zbiorem domkniętym i wypukłym. Wykazać, że dla każdego $x \in X$ istnieje najlepsze przybliżenie w K, tzn. $y \in K$, takie że $\|x - y\| = d(x, K) := \inf\{\|x - z\| : z \in K\}$.