Zadania na kartkówkę z Analizy Funkcjonalnej - seria 2

1. Załóżmy, że T jest operatorem ograniczonym na przestrzeni Banacha X. Wykazać, że jeśli $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$, $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ jest zbieżny w X, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n T x_n$ także zbiega w X i $T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T x_n$.

2. Załóżmy, że X, Y są przestrzeniami Banacha, a $T : X \to Y$ jest operatorem liniowym. Dowieść, że T jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego funkcjonału ograniczonego $\varphi \in Y^*$ złożenie $\varphi \circ T$ jest przekształceniem ciągłym.

3. Niech

$$M := \left\{ f \in L^1[0,1] : \int_0^1 f(t)\, dt = 0 \right\}.$$

Wykazać, że M jest domkniętą podprzestrzenią $L^1[0,1]$. Dla $g \equiv 1$, obliczyć $\operatorname{dist}(g, M)$. Czy istnieje funkcja $f \in M$ taka, że $\operatorname{dist}(g, M) = \|f - g\|$? Ile jest takich funkcji?

4. Załóżmy, że $(X, \mathcal{F}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą, zaś $\mathcal{G}$ jest pod-σ-ciałem $\mathcal{F}$. Wykazać, że

(i) $M = L^2(X, \mathcal{G}, \mu)$ jest domkniętą podprzestrzenią $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$.
(ii) $\int_A P_M f \, d\mu = \int_A f \, d\mu$ dla dowolnego $A \in \mathcal{G}$ takiego, że $\mu(A) < \infty$ oraz $f \in L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$.
(iii) P_M jest nieujemny, tzn. $P_M f \geq 0$ μ-p.w., jeśli $f \geq 0$ μ-p.w.

5. Rozstrzygnąć, czy przestrzeń $C[0,1]$ z normą supremum jest przestrzenią Hilberta.

6. Niech H_n będzie układem wielomianów Hermite'a, danym wzorem:

$$H_n(t) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} e^{t^2/2} \frac{d^n}{dt^n} \left(e^{-t^2/2} \right).$$

a) Wykazać, że jest to układ ortonormalny w przestrzeni $L^2(\mathbb{R}, e^{-t^2/2}\, dt)$.
b*) Czy jest to układ zupełny?

7. W przestrzeni $H = L_2[-1,1]$ rozważamy podprzestrzeń liniową M generowaną przez funkcje 1, t oraz t^2. Wyznaczyć $\operatorname{dist}(f, M)$, gdzie $f(t) = e^t$.

8. Niech $1 \leq p \leq \infty$ będzie ustalonym parametrem. Czy istnieje funkcjonał $\varphi \in (\ell_p)^*$ spełniający warunek $\|\varphi\|_{(\ell_p)^*} \leq 1$ oraz $\varphi((1,0,0,\ldots)) = \varphi((1,1,0,0,\ldots)) = 1$?

9. Załóżmy, że E jest przestrzenią unormowaną, a F jest jej podprzestrzenią liniową. Przypuśćmy, że nie istnieje niezerowy funkcjonał $\varphi \in E^*$ spełniający warunek $\varphi|_F = 0$. Dowieść, że F jest gęste w E.

10. Załóżmy, że X jest przestrzenią Banacha, $V \subset X$ jest domkniętą podprzestrzenią oraz $x_0 \in X \setminus V$. Dowieść, że $\operatorname{lin}\{x_0, V\}$ jest domkniętą podprzestrzenią X.