Zadania na kartkówkę z Analizy Funkcjonalnej - seria 1

1. Załóżmy, że X jest przestrzenią unormowaną, a $Y \subseteq X$ jest podprzestrzenią o niepustym wnętrzu. Dowieść, że $Y = X$.

2. Rozważmy zbiór

$$X = \left\{ (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \; : \; \sup_{n \geq 1} n^2 |x_n| < \infty \right\},$$

wyposażony w normę $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. Czy $(X, \| \cdot \|)$ jest przestrzenią Banacha?

3. Niech $C^1[0,1]$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych z $[0,1]$ w $\mathbb{R}$, które są różniczkowalne na $(0,1)$ i których pochodna przedłuża się do funkcji ciągłej na $[0,1]$. Rozważmy normy

(i) $|f(0)| + \|f'\|_\infty$;

(ii) $\|f\|_\infty + \sup_{x \in (0,1)} |xf'(x)|$.

Które z tych norm wprowadzają na $C^1[0,1]$ strukturę przestrzeni Banacha?

4. Wykazać, że przestrzeń $C_0(\mathbb{R}^d)$ funkcji ciągłych znikających w nieskończoności (tzn. spełniających warunek $\lim_{||x|| \to \infty} f(x) = 0$), wyposażona w normę supremum, jest przestrzenią Banacha.

5. Rozpatrujemy przestrzenie $L_p[0,1]$ oraz $L_p[0,\infty)$ z miarą Lebesgue'a. Niech $1 \leq p < q$.

a) Znaleźć funkcję $f \in L_p[0,1]$ taką, że $\|f\|_q = \infty$.

b) Znaleźć funkcję $f \in L_p[0,\infty)$ taką, że $\|f\|_q = \infty$.

c) Znaleźć funkcję $f \in L_q[0,\infty)$ taką, że $\|f\|_p = \infty$.

6. Załóżmy, że $(X, \| \cdot \|)$ jest przestrzenią unormowaną oraz $x_1, x_2, \ldots, x_m \in X$ jest ciągiem liniowo niezależnych wektorów. Wykazać, że istnieje $\varepsilon > 0$ o następującej własności: jeśli $y_1, y_2, \ldots, y_m \in X$ spełniają warunek $\|y_j\| < \varepsilon$ dla wszystkich j, to $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_m + y_m$ są liniowo niezależne.

7. Niech X będzie przestrzenią wielomianów rzeczywistych na półprostej $[0,\infty)$. Dla $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ określamy normę na dwa sposoby:

$$\|f\|_1 := \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \qquad \|f\|_2 = \sup_{x \geq 0} |f(x)| e^{-x}.$$

(a) Sprawdzić, że są to dobrze określone, nierównoważne normy na X.

(b) Czy w którejś z nich przestrzeń X jest zupełna? (Wskazówka dla $\| \cdot \|_2$: rozważyć ciąg wielomianów z rozwinięcia $e^{x/2}$.)

8. Określamy operator $T : \ell^1 \to \ell^\infty$ wzorem $T(x)_n = \sum_{k=n}^{\infty} x_k / 2^k$, $n = 1, 2, \ldots$, dla $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^1$. Dowieść, że T jest ciągły i wyznaczyć jego normę.

9. Wykazać ciągłość oraz wyznaczyć normę przekształcenia $T : C(0,2) \to L^2(0,2)$ danego wzorem $Tf(x) = f(\sqrt{x}) \sin x$, $x \in (0,2)$.

10. Wykazać, że $\varphi(f) = f(0) + f(1) + \int_0^{1/2} f(x^2) \mathrm{d}x$ jest ciągłym funkcjonałem na $C(0,1)$ i wyznaczyć jego normę.