Dodatkowe zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 4

1. Ustalmy $p \in (1, \infty)$. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą taką, że $(f \circ u_n)_{n \geq 1}$ zbiega słabo w $L_p(0, 1)$ do $f \circ u$ dla każdego ciągu $(u_n)_{n \geq 1}$ zbieżnego słabo w $L_p(0, 1)$ do u. Wykazać, że f jest funkcją afiniczną.

Wskazówka. Dla a, $b \in \mathbb{R}$ oraz $n = 1, 2, \ldots$, rozważmy funkcję $u_n : [0, 1) \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$u_n(x) = \begin{cases} a & \textit{jeśli } x \in [k/n, (k+1)/n), \quad k \textit{ parzyste}, \\ b & \textit{jeśli } x \in [k/n, (k+1)/n), \quad k \textit{ nieparzyste}. \end{cases}$$

Czy ciąg $(u_n)_{n \geq 1}$ zbiega słabo w $L_p(0, 1)$? Jeśli tak, to do jakiej granicy?

2. Załóżmy, że X jest refleksywną przestrzenią Banacha, a $\varphi : X \to \mathbb{R}$ jest ciągłą funkcją wypukłą, spełniającą warunek $\lim_{\|x\| \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$. Dowieść, że istnieje wektor $x_0 \in X$ taki, że

$$\varphi(x_0) = \inf_{x \in X} \varphi(x).$$

3. Załóżmy, że X jest przestrzenią Banacha i niech $A : X \to X^*$ będzie takim operatorem liniowym, że dla każdego $x \in X$ zachodzi nierówność $[A(x)](x) \geq 0$ (tzn. funkcjonał $\varphi = A(x)$ spełnia warunek $\varphi(x) \geq 0$). Wykazać, że A jest operatorem ograniczonym.

4. Wykazać, że jeśli V jest domkniętą podprzestrzenią $L_2[0, 1]$ oraz $V \subseteq C[0, 1]$, to $\dim V < \infty$.