

### Dodatkowe zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 3

1. Niech  $Y$  będzie domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Banacha  $X$  oraz niech  $T : Y \rightarrow \ell^\infty$  będzie ograniczonym liniowym operatorem. Wykazać, że istnieje operator  $\tilde{T} : X \rightarrow \ell^\infty$  rozszerzający  $T$  o tej samej normie.

2. Załóżmy, że  $T : \ell_1 \rightarrow \ell_2$  jest liniowym, ciągłym, różnowartościowym przekształceniem. Udowodnić, że obraz  $T(\ell_1)$  nie jest domkniętą podprzestrzenią  $\ell_2$ .

3. Załóżmy, że  $X$  jest przestrzenią unormowaną,  $\varepsilon \in (0, 1/2)$  oraz  $\varphi, \psi \in X^*$  są funkcjonalami o normie 1. Wykazać, że jeśli dla dowolnego wektora  $x \in \text{Ker } \varphi$  zachodzi nierówność  $|\psi(x)| \leq \varepsilon \|x\|$ , to  $\|\varphi - \psi\| \leq 2\varepsilon$  lub  $\|\varphi + \psi\| \leq 2\varepsilon$ .

4. Wykazać, że  $c_0$  nie jest przestrzenią dualną do żadnej przestrzeni Banacha.