Dodatkowe zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 2

1. Dla lokalnie całkowalnej funkcji $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, określamy

$$Tf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(y) \mathrm{d}y, \qquad x > 0.$$

Wykazać, że dla każdego $1 < p < \infty$, T jest operatorem ograniczonym na $L^p(0, \infty)$ i $\|T\|_{L^p(0,\infty) \to L^p(0,\infty)} = \frac{p}{p-1}$.

Wskazówka: Aby wykazać, że $\|T\|_{L^p(0,\infty) \to L^p(0,\infty)} \leq \frac{p}{p-1}$, *użyć całkowania przez części i nierówności Höldera. W celu wykazania nierówności przeciwnej, rozważyć funkcję* $f(x) = x^{-1/p} \chi_{(\varepsilon, \varepsilon^{-1})}(x)$, *gdzie* $\varepsilon > 0$.

2. Rozważmy operator $T : C([0, 1]) \to C([0, 1])$ zadany przez

$$Tf(x) = f(x) + \int_0^x f(s) \, \mathrm{d}x.$$

(1) Wykazać, że $\ker T = \{0\}$ oraz $\operatorname{range} T = C([0, 1])$.
(2) Znaleźć operator odwrotny $T^{-1} : C([0, 1]) \to C([0, 1])$. Rozstrzygnąć, czy jest to liniowy operator ograniczony. Jeśli tak, to wyznaczyć jego normę.

3. Niech $0 < p < 1$. Rozważmy przestrzeń $L^p([0, 1])$ funkcji mierzalnych $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ takich, że całka $\int_0^1 |f(x)|^p \, \mathrm{d}x$ jest skończona, z metryką

$$\mathrm{d}(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|^p \, \mathrm{d}x.$$

(Podobnie jak w przypadku $p \geq 1$ utożsamiamy ze sobą funckje równe prawie wszędzie.)

(1) Niech $\epsilon > 0$ będzie ustalony. Wykazać, że otoczka wypukła kuli o środku w zerze i promieniu ϵ nie jest zawarta w żadnej kuli.
(2) Uzupełnić poniższy dowód faktu, że $L^p([0, 1])^* = \{0\}$:
   (a) Wykazać, że jeśli ϕ jest niezerowym ciągłym funkcjonałem liniowym na $L^p([0, 1])$, to istnieje $f \in L^p$ takie, że $|\phi(f)| \geq 1$.
   (b) Niech f będzie jak wyżej. Wykazać, że istnieje $s \in (0, 1)$ takie, że
   $$\int_0^s |f(x)|^p \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^1 |f(x)|^p \, \mathrm{d}x > 0.$$
   (c) Rozważyć rozkład $f = f\chi_{[0,s]} + f\chi_{(s,1]}$, aby znaleźć funkcję $f_1 \in L^p$ taką, że $|\phi(f_1)| \geq 1$ oraz
   $$\int_0^1 |f_1(x)|^p \, \mathrm{d}x = 2^{p-1} \int_0^1 |f(x)|^p \, \mathrm{d}x.$$
   (d) Znaleźć ciąg (f_n) w L^p taki, że $|\phi(f_n)| \geq 1$ oraz $\mathrm{d}(f_n, 0) \to 0$.

4. Niech $f, f_1, f_2, \ldots, f_n$ będą funkcjonałami liniowymi na przestrzeni liniowej X. Wykazać, że f jest kombinacją liniową funkcjonałów $f_1, f_2, \ldots, f_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigcap_{k=1}^n \ker f_k \subset \ker f.$$