Dodatkowe zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 1

1. Niech $p \in [1, \infty]$. Rozważmy ciąg $(x_n)_{n\geq 1}$ w przestrzeni ℓ_p, dany wzorem

$$e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots), \qquad n = 1,\, 2,\, \ldots$$

(wyraz 1 pojawia się w e_n na n-tym miejscu). Niech C będzie uwypukleniem zbioru $\{e_n\}_{n\geq 1}$, tzn.

$$C = \bigcap \Big\{ B \,:\, B \text{ jest podzbiorem wypukłym } \ell_p, \text{ zawierającym } \{e_n\}_{n\geq 1} \Big\}.$$

Rozstrzygnąć, czy $0 \in \overline{C}$.

2. Niech Y będzie domkniętą właściwą podprzestrzenią przestrzeni unormowanej X oraz niech $\alpha \in (0, 1)$. Wykazać, że istnieje wektor $x_0 \in X$ taki, że $\|x_0\| = 1$ oraz

$$\|x_0 - y\| \geq \alpha \quad \forall y \in Y.$$

3. Załóżmy, że X jest nieskończenie wymiarową przestrzenią Banacha i niech $C \subset X$ będzie niepustym zwartym podzbiorem. Wykazać, że wnętrze C jest zbiorem pustym.

4. Wykazać, że przestrzeń funkcji ciągłych z $(0, 1)$ w $\mathbb{R}$, wyposażona w topologię zbieżności jednostajnej, nie jest normowalna.