Zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 9

1. Wykazać, że jeśli $1 < p < \infty$ i ciąg $(f_n)_{n\geq 1} \subset L_p[0,1]$ spełnia $\|f_n\|_p \leq 1$ i $\lambda_1(\{x : f_n(x) \neq 0\}) \to 0$, to $(f_n)_{n\geq 1}$ zbiega słabo do zera. Czy jest to prawdą dla $p = 1$?

2. Wykazać, że domknięta kula jednostkowa $\{f \in C[0,1] : \|f\|_\infty \leq 1\}$ nie jest słabo zwarta.

3. Wykazać, że ciąg wektorów $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k=1}^\infty$ zbiega słabo do zera w ℓ_p, $1 < p < \infty$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sup_n \|x^{(n)}\|_p < \infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = 0 \quad \text{dla wszystkich } k.$$

Czy charakteryzacja ta jest prawdziwa dla ℓ_1? A dla c_0?

4. Wykazać, że ciąg $e_n = (0,0,\ldots,0,1,0,0,\ldots)$ (jedynka na n-tym miejscu), $n = 1, 2, \ldots$, zbiega słabo* w ℓ_1, ale nie zbiega słabo w ℓ_1.

5. Wykazać, że $C[0,1]$ jest gęste w $L_\infty(0,1)$ w słabej* topologii.

6. Załóżmy, że X jest przestrzenią Banacha, a $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ zbiega słabo do $x \in X$. Wykazać, że $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$. Podobnie, udowodnić, że jeśli $(\varphi_n)_{n\geq 1} \subset X^*$ zbiega słabo* do $\varphi \in X^*$, to $\|\varphi\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|\varphi_n\|$.

7. Niech X będzie refleksywną przestrzenią Banacha, a Y będzie przestrzenią unormowaną. Przypuśćmy, że $T : X \to Y$ jest takim operatorem liniowym, że jeśli ciąg $(x_n)_{n\geq 1}$ zbiega słabo do 0 w X, to $(T(x_n))_{n\geq 1}$ zbiega słabo do 0 w Y. Udowodnić, że T jest ograniczony.

8. Rozważmy zbiór $A = \left\{ f \in L_3(0,1) : \int_0^1 f = 1, \int_0^1 |f|^3 \leq 2, \operatorname{esssup} |f| \leq 5 \right\}$ oraz operator (nieliniowy) $\mathcal{J}(f) = \int_0^1 f^2 \mathrm{d}x$ działający na $L^3(0,1)$. Wykazać, że istnieje funkcja h minimalizująca funkcjonał $\mathcal{J}$ na A, tzn. spełniająca

$$\mathcal{J}(h) = \inf_{f\in A} \mathcal{J}(f).$$

9. Dla $n \geq 1$, rozważamy funkcjonał liniowy $\varphi_n \in (\ell_\infty)^*$ dany wzorem $\varphi_n(x) = x_n$, gdzie $x = (x_k)_{k\geq 1} \in \ell_\infty$.

a) Dowieść, że $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ jest podzbiorem kuli jednostkowej w ℓ_∞^*, ale z ciągu $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ nie da się wybrać podciągu słabo* zbieżnego.

b) Czy funkcjonał zerowy z $(\ell_\infty)^*$ jest punktem skupienia, w słabej* topologii, ciągu $(\varphi_n)_{n\geq 1}$?

c) Korzystając z twierdzenia Banacha-Alaoglu, wykazać, że istnieje $\varphi \in \ell_\infty^*$ będący punktem skupienia ciągu $(\varphi_n)_{n\geq 1}$. Pokazać, że $\varphi \neq \hat{\psi}$ dla dowolnego $\psi \in \ell_1$, gdzie $\hat{\psi}$ jest obrazem elementu ψ przy naturalnym zanurzeniu ℓ_1 w $(\ell_1)^{**} = \ell_\infty^*$.

10. Niech H będzie przestrzenią Hilberta i niech $(x_n)_{n\geq 1} \subset H$ bedzie ciągiem zbieżnym słabo do $x \in H$. Pokazać, że następujące warunki są równoważne:

(i) $(x_n)_{n\geq 1}$ zbiega silnie (tj. w normie) do x.

(ii) $(\|x_n\|)_{n\geq 1}$ zbiega do $\|x\|$.