Zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 8

1. Załóżmy, że $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest takim ciągiem, że dla każdego $y \in l_p$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ jest zbieżny. Wykazać, że $x \in l_q$ dla $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

2. Ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset L^2[0,1]$ spełnia warunek $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t) g(t)\, dt = 0$ dla wszystkich funkcji $g \in L^2[0,1]$. Wykazać, że $\sup_n \|f_n\|_2 < \infty$. Czy musi zachodzić $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = 0$?

3. Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią Banacha, a $A \subseteq X$ jej podzbiorem. Przypuśćmy, że dla każdego $\varphi \in X^*$, zbiór $\{\varphi(x) : x \in A\}$ jest ograniczony w $\mathbb{R}$. Udowodnić, że A jest zbiorem ograniczonym w X (tzn. istnieje kula $B(0, R)$ zawierająca A).

4. Niech X będzie refleksywną przestrzenią Banacha. Udowodnić, że dla każdego $\varphi \in X^*$ istnieje $x \in X$ taki, że $\|x\| = 1$ oraz $\varphi(x) = \|\varphi\|$. Czy założenie o refleksywności X jest istotne?

5. Wykazać, że jeśli X jest ośrodkową przestrzenią refleksywną, to X^* także jest ośrodkowa.

6. Niech X będzie przestrzenią Banacha, a Z domkniętą podprzestrzenią X^*, taką że $Z \neq X^*$. Przypuśćmy, że Z rozdziela punkty w X, tzn. jeśli $x \in X$ oraz $x^*(x) = 0$ dla każdego $x^* \in Z$, to $x = 0$. Udowodnić, że X nie jest refleksywna, tzn. kanoniczne włożenie $i : X \to X^{**}$ nie jest surjekcją.

7. Niech m będzie miarą Lebesgue'a na $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, a $\mathcal{A}$ oznacza σ-ciało $\sigma\left(\left\{\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] : n = 1, 2, \ldots\right\}\right)$. Definiujemy nową miarę λ na $\mathcal{A}$ wzorem

$$\lambda(E) = \int_E f\, dm, \qquad E \in \mathcal{A},$$

gdzie $f(x) = 2x$. Wyznaczyć pochodną Radona-Nikodyma $\frac{d\lambda}{dm}$.

8. Niech $X = [0,1]$, $\mathcal{B}$ będzie klasą zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a na $[0,1]$, ν oznacza miarę Lebesgue'a, a μ oznacza miarę liczącą na $\mathcal{B}$. Sprawdzić, że ν jest skończona i absolutnie ciągła względem μ, ale nie istnieje funkcja f, taka że

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu$$

dla każdego $E \in \mathcal{B}$.

9. Niech m_1 oznacza miarę Lebesgue'a obciętą do przedziału $[0,1]$, zaś m_2 - miarę z gęstością $g(x) = \sin x \chi_{(\pi, 2\pi)}(x)$ względem miary Lebesgue'a.

a) Sprawdzić, że miary $\mu = \delta_{2\pi} + m_1$ oraz $\nu = m_2 - \delta_0$ są wzajemnie osobliwe.

b) Sprawdzić, że μ jest absolutnie ciągła względem $\mu - \nu$ i obliczyć odpowiadającą pochodną Radona-Nikodyma.