

### Zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 7

1. Obliczyć normę funkcjonału  $\varphi : L^3(0, 1) \rightarrow \mathbb{K}$  zadanego przez

$$\varphi(f) = \int_0^{3/4} f(x) dx.$$

2. Niech  $X = \left\{ f \in L^{3/4}(0, 1) : \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx = 0 \right\}$ . Wykazać, że  $X$  jest domkniętą podprzestrzenią  $L^{3/4}$  i obliczyć  $\text{dist}(\chi_{[0, 1/2]}, X)$ .

3. Opisać  $(L_\infty(0, 1))^*$ .

4. Rozważamy przestrzeń  $X = \left\{ x = (x_n)_{n \geq 1} : \|x\| = \left( \sum_{n=1}^{\infty} n^3 |x_n|^3 \right)^{1/3} < \infty \right\}$ . Wyznaczyć przestrzeń dualną do  $X$ .

5. Wyznaczyć przestrzeń dualną do  $c$ .

6. Niech  $\mu$  będzie regularną miarą borelowską (ze znakiem) na  $[0, 1]$ . Wykazać, że jeśli dla każdego  $n = 0, 1, 2, \dots$  zachodzi równość  $\int_{[0, 1]} x^n d\mu(x) = 0$ , to  $\mu = 0$ .