Zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 6

1. Wykazać, że jeśli X_0 jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni unormowanej X oraz $x \in X \setminus X_0$, to istnieje funkcjonał $\varphi \in X^*$ zerujący się na X_0 taki, że $\varphi(x) = 1$.

2. Niech F będzie podprzestrzenią przestrzeni Banacha X. Wykazać, że dla dowolnego $x \in X$,

$$\operatorname{dist}(x, F) = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in X^*, \|\varphi\| \leq 1, \varphi|_F = 0\}.$$

3. (a) Niech X będzie przestrzenią Banacha oraz $x \in X$ będzie wektorem o normie 1. Udowodnić, że $\Delta(x) := \{\varphi \in X^* : \varphi(x) = 1 = \|\varphi\|\}$ jest niepustym, domkniętym zbiorem wypukłym.

(b) Podać przykłady $x \in \ell^1$ takie, że $\Delta(x)$ jest jednopunktowe, n-wymiarowe, nieskończenie wymiarowe.

(c) Opisać wszystkie $x \in c_0$ takie, że $\Delta(x)$ jest jednopunktowe.

4. Przestrzeń $C[0,1]$ można traktować jako domkniętą podprzestrzeń $L^\infty[0,1]$. Funkcjonał $\delta_x(f) := f(x)$ jest ciągłym funkcjonałem o normie 1 na $C[0,1]$, zatem z twierdzenia Hahna-Banacha można go rozszerzyć do funkcjonału φ_x na $L^\infty[0,1]$ o normie 1. Wykazać, że nie istnieje funkcja $g \in L^1[0,1]$ taka, że $\varphi_x(f) = \int_0^1 f(s)g(s)\,ds$. Udowodnić, że jeśli $f \in L^\infty[0,1]$ jest taka, że $f = 0$ na zbiorze $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, to $\varphi_x(f) = 0$.

5. Mówimy, że przestrzeń X się izometrycznie wkłada w przestrzeń Y, jeśli istnieje liniowe przekształcenie $T : X \to Y$ takie, że $\|Tx\| = \|x\|$ dla każdego $x \in X$. Wykazać, że każda ośrodkowa przestrzeń Banacha się wkłada izometrycznie w ℓ^∞.

6. Wykazać, że ośrodkowość przestrzeni X^* implikuje ośrodkowość przestrzeni X. Czy odwrotna implikacja jest prawdziwa?

7. Niech A i B będą rozłącznymi niepustymi wypukłymi podzbiorami rzeczywistej przestrzeni Banacha X takimi, że A jest domknięty, a B jest zwarty. Wykazać, że istnieje funkcjonał $\varphi \in X^*$ taki, że $\sup_{x\in A} \varphi(x) < \inf_{x\in B} \varphi(x)$.