Zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 5

1. Znaleźć ortogonalizację ciągu wektorów $1, t, t^2$ w przestrzeni $L_2[-1,1]$.

2. Znaleźć wielomian w stopnia 2 dla którego wartość całki

$$\int_{-1}^{1} |t^4 - w(t)|^2 \, dt$$

jest najmniejsza.

3. Wykazać, że układ Rademachera $f_n := \operatorname{sgn}(\sin(2^n \pi x))$, $n = 1, 2, \ldots$, jest układem ortogonalnym w $L_2[0,1]$. Czy jest to układ zupełny?

4. Niech $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie układem wielomianów Legendre'a, danym wzorem

$$P_n(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left(t^2 - 1\right)^n, \quad t \in [-1,1], \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Wykazać, że $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ jest układem ortogonalnym w przestrzeni $L_2[-1,1]$. Jak należy go znormalizować, aby uzyskać układ ortonormalny?

b) Czy jest to układ zupełny?

5. Niech $(L_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie układem wielomianów Laguerre'a, danym wzorem:

$$L_n(t) = \frac{1}{n!} e^t \frac{d^n}{dt^n} \left(t^n e^{-t}\right), \quad t \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Wykazać, że $(L_n)_{n=0}^{\infty}$ jest układem ortogonalnym w przestrzeni $L_2(\mathbb{R}^+, e^{-t}\,dt)$. Czy jest on ortonormalny?

b*) Czy jest to układ zupełny?

6. Wykazać, że każdą funkcję parzystą f w $L_2[-\pi, \pi]$ da się przedstawić w postaci

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nt,$$

przy czym szereg jest zbieżny w L_2. Ile wynosi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$?

7. Niech M będzie domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta H, $P = P_M$ będzie rzutem ortogonalnym na M oraz T będzie operatorem ograniczonym na H. Dowieść, że M oraz $M^{\perp}$ są przestrzeniami niezmienniczymi dla T wtedy i tylko wtedy, gdy $TP = PT$.

8. Załóżmy, że M jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta H. Wykazać, nie korzystając z twierdzenia Hahna-Banacha, że dowolny funkcjonał $\varphi \in M^*$ rozszerza się do pewnego funkcjonału $\psi \in H^*$ spełniającego warunek $\|\psi\|_{H^*} = \|\varphi\|_{M^*}$.

9. Niech H będzie przestrzenią Hilberta $l^2(\mathbb{N})$ oraz

$$V := \{x \in l^2(\mathbb{N}) : x_1 + 2x_3 = 0 \text{ i } -2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

a) Znaleźć podprzestrzeń $V^{\perp}$.

b) Niech $P_1, P_2 : H \to H$ będą rzutami ortogonalnymi w H, odpowiednio na V oraz na $V^{\perp}$. Znaleźć $P_1 a$ i $P_2 a$ dla $a = (2^{-n})_{n=1}^{\infty}$.

10. Załóżmy, że H jest przestrzenią Hilberta, a operator $T \in \mathcal{B}(H)$ spełnia $\langle Tx, x \rangle \geq \|x\|^2$ dla wszystkich $x \in H$. Wykazać, że $T : H \to H$ jest izomorfizmem.