Zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 4

1. Niech $X = \{f \in C[0,1] : f(t) = 2f(1-t), t \in [0,1/2]\}$. Dla funkcji $g \in C[0,1]$ zadanej wzorem $g(t) = 1$, obliczyć $\operatorname{dist}(g, X)$. Czy istnieje $f \in X$ taka, że $\operatorname{dist}(g, X) = \|f - g\|_\infty$? Ile jest takich funkcji?

2. Niech

$$M = \left\{ f \in C[0,1] : \int_0^{1/2} f(t)\, dt = \int_{1/2}^1 f(t)\, dt \right\}.$$

Wykazać, że M jest domkniętą podprzestrzenią $C[0,1]$. Dla $g(t) = t$, obliczyć $\operatorname{dist}(g, M)$. Czy istnieje funkcja $f \in M$ taka, że $\operatorname{dist}(g, M) = \|f - g\|$?

3. Niech

$$M = \{f \in L_2[-1,1] : f(x) = f(-x) \text{ dla p.w. } x\}.$$

Znaleźć $M^\perp$ oraz rzut ortogonalny na M.

4. a) Niech

$$M = \left\{ f \in L_2[-1,1] : \int_{-1}^1 x f(x) \mathrm{d}x = 0 \right\}.$$

Wyznaczyć $M^\perp$, $P_M g$ oraz $\operatorname{dist}(g, M)$, gdzie $g \in L_2[-1,1]$ dana jest wzorem $g(x) = x^2 + x^3$.

b) To samo dla

$$N = \left\{ f \in L_2[-1,1] : \int_{-1}^1 x f(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x) \mathrm{d}x = 0 \right\}.$$

c) Czy dla dowolnej funkcji $g \in L_2[-1,1]$ istnieje element f przestrzeni

$$K = \left\{ f \in L_2[-1,1] : \int_{-1}^1 x f(x) \mathrm{d}x = 0,\ \int_{-1}^1 \left| \frac{f(x)}{x} \right| \mathrm{d}x < \infty \right\},$$

dla którego $\|f - g\|_{L_2[-1,1]} = \operatorname{dist}(g, K)$?

5. Niech V_n będzie podprzestrzenią $L^2[0,1]$ składającą się z funkcji stałych na przedziałach $[k/n, (k+1)/n)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

(a) Znaleźć $V_n^\perp$

(b) Wyznaczyć rzut ortogonalny f na V_n.

(c) Wyznaczyć odległość $f(t) = t$ w $L^2[0,1]$ od V_n.

6. Wykazać, że $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ jest przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy $p = 2$.

7. Załóżmy, że $H = \ell_2$ oraz $M = c_{00}$. Sprawdzić, że M jest podprzestrzenią H oraz $M \subset (M^\perp)^\perp$, $M \neq (M^\perp)^\perp$.