Zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 3

1. Określamy operator $T : \ell_1 \to c_0$ wzorem $T(x)_n = \sum_{j=n}^{\infty} x_j$, $n = 1, 2, \ldots$. Wykazać, że T jest operatorem ciągłym i obliczyć jego normę.

2. Znaleźć normę przekształcenia $Tf(x) = xf(x)$ z $L_p[-1,1]$ w $L_1[-1,1]$, gdzie $1 \le p \le \infty$ jest ustalonym parametrem.

3. Obliczyć normę $id : \ell_p^n \to \ell_q^n$, gdzie n oraz $1 \le p \le q \le \infty$ są ustalone.

4. Wykazać, że $\varphi(f) = \int_0^{1/2} f(x)dx - \int_{1/2}^{1} f(x)\mathrm{d}x - f(1)$ jest ciągłym funkcjonałem na $C[0,1]$ i policzyć jego normę.

5. Niech $X = \{f \in C[0,1] : f(t) = 2f(1-t), t \in [0,1/2]\}$. Czy X z normą supremum jest przestrzenią Banacha? Udowodnić, że następujące funkcjonały są ciągłe na X i wyznaczyć ich normy:
a) $\varphi(f) = f(1/4)$.
b) $\varphi(f) = f(3/4)$.
c) $\varphi(f) = \int_0^{1/2} f(x)\mathrm{d}x$.

6. Wykazać, że jeśli Y jest skończenie wymiarową podprzestrzenią przestrzeni unormowanej $(X, \|\cdot\|)$, to Y jest podprzestrzenią domkniętą.

7. Wykazać, że
a) dla $1 \le p \le \infty$, ℓ_p jest izometryczna z pewną podprzestrzenią $L_p[0,1]$.
b) dla $1 \le p < \infty$, ℓ_2 jest izomorficzna z pewną podprzestrzenią $L_p[0,1]$.
c) dla $1 \le p < \infty$, ℓ_2 jest izometryczna z pewną podprzestrzenią $L_p[0,1]$.
d) dla $1 \le p \le \infty$, $L_p[0,1]$ jest izometryczna z $L_p(\mathbb{R})$.

8. Załóżmy, że $T : X \to Y$ jest operatorem liniowym między dwiema przestrzeniami unormowanymi. Wykazać, że norma operatorowa

$$\|T\|_{X\to Y} = \sup_{x\in X\,:\,\|x\|_X \le 1} \|Tx\|_Y$$

jest normą.