Zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 2

1. Niech $x = (x_k)_{k=1}^n$. Wykazać, że
a) $\|x\|_q \le \|x\|_p \le n^{1/p-1/q}\|x\|_q$ dla $1 \le p < q$.
b) $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.
c) Czy stałe w a) są optymalne? Jakie zawierania dla kul jednostkowych w ℓ_p^n wynikają z a)?

2. Niech $x = (x_k)_{k=1}^\infty$ oraz $1 \le p < q$.
a) Wykazać, że $\|x\|_q \le \|x\|_p$.
b) Znaleźć wektor x taki, że $\|x\|_p = \infty$ oraz $\|x\|_q < \infty$.
c) Czy zawsze $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$? Jeśli nie, to kiedy tak jest?

3. Wykazać, że zbiór

$$\left\{ x = (x_k)_{k=1}^\infty \, : \, \sum_{k=1}^\infty |x_k| \le 1 \right\}$$

jest domkniętym wypukłym podzbiorem ℓ_2 o pustym wnętrzu. Czy jest to zbiór zwarty?

4. Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą skończoną μ oraz f będzie funkcją mierzalną na X. Udowodnić, że dla $1 \le p < q$,
a) $\|f\|_p \le \mu(X)^{1/p-1/q}\|f\|_q$, w szczególności $\|f\|_p \le \|f\|_q$ gdy $\mu(X) = 1$.
b) Wykazać, że $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

5. Załóżmy, że $1 \le p_0 < p < p_1$ są ustalonymi parametrami oraz $(X, \mathcal{F}, \mu)$ jest przestrzenią mierzalną. Dowieść, że dowolną funkcję $f \in L_p(X, \mathcal{F}, \mu)$ można przedstawić w postaci $f = f_0 + f_1$ dla pewnych $f_0 \in L_{p_0}(X, \mathcal{F}, \mu)$ oraz $f_1 \in L_{p_1}(X, \mathcal{F}, \mu)$.

6. Rozważmy w przestrzeni ℓ_p rodzinę wektorów jednostkowych

$$e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

gdzie wyraz 1 znajduje się w e_n na n-tym miejscu. Wykazać, że jeśli $p < \infty$, to dla dowolnego $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_p$ ciąg sum częściowych zbiega w ℓ_p, tzn.

$$\sum_{k=1}^n x_k e_k \to x \qquad \text{w } \ell_p.$$

Czy fakt ten zachodzi dla $p = \infty$?