Zadania z Analizy Funkcjonalnej - seria 11

1. Czy operator „ przesunięcia w prawo” na l_p jest zwarty?

2. Określmy $T : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ wzorem $Tf(x) = \int_{x+1}^{x} f(y)\,dy$. Wykazać, że T jest ciągły. Czy T jest zwarty?

3. Zbadać, jaki warunek musi spełniać funkcja $g \in C[0,1]$, by operator $T : C[0,1] \to C[0,1]$ dany wzorem $Tf = fg$ był zwarty.

4. Niech $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie kanoniczną bazą l_p, $1 \leq p < \infty$. Wykaż, że operator liniowy $T : l_p \to l_p$ taki, że $Te_n = a_n e_n$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

5. Rozważmy operator T, działający na funkcjach określonych na $[0,1]$ wzorem $Tf(x) = \int_0^x f(s)\,ds$. Czy jest to operator zwarty jako operator

a) z $L_p[0,1]$ w $L_p[0,1]$, $1 < p \leq \infty$?
b) z $L_1[0,1]$ w $C[0,1]$?
c) z $L_1[0,1]$ w $L_1[0,1]$?

6. Niech $\alpha \in (0,1)$ będzie ustalonym parametrem. Dowieść, że operator $T : C(0,1) \to C(0,1)$, dany wzorem

$$Tf(x) = \int_0^1 \frac{f(y)}{|x-y|^\alpha} \mathrm{d}y$$

jest zwarty.

7. Wykazać, że operatory zwarte przekształcają ciągi słabo zbieżne w ciągi silnie zbieżne.

8. Niech E będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią Banacha. Wykazać, że jeśli $T : E \to E$ jest operatorem zwartym, to $I - T$ nie jest operatorem zwartym.

9. Wykazać, że operator zwarty zadany na nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha nie jest odwracalny

10. Załóżmy, że $T : X \to X$ jest takim operatorem liniowym, że T^2 jest zwarty. Czy wynika stąd, że T jest operatorem zwartym?